MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

Písomný výstup pedagogického klubu

1. Prioritná os	Vzdelávanie
2. Špecifický cieľ	1.1.1 Zvýšiť inkluzívnosť a rovnaký prístup ku kvalitnému vzdelávaniu a zlepšiť výsledky a kompetencie detí a žiakov
3. Prijímateľ	Gymnázium Mihálya Tompu Reformovanej kresťanskej cirkvi s vyučovacím jazykom maďarským
4. Názov projektu	Rozvoj gramotností na Gymnáziu Mihálya Tompu Reformovanej kresťanskej cirkvi s vyučovacím jazykom maďarským
5. Kód projektu ITMS2014+	312011W809
6. Názov pedagogického klubu	Pedagogický klub pre matematickú gramotnosť
7. Meno koordinátora pedagogického klubu	Mgr. Zsolt Főző
8. Školský polrok	2.polrok 2020/2021
9. Odkaz na webové sídlo zverejnenia písomného výstupu	http://tmrg.sk/projekt-oplz/

10.

Úvod:

Stručná anotácia

Nadväzujúc na prácu prvého a druhého obdobia, pedagogický klub pre matematickú gramotnosť naďalej venoval značnú pozornosť problematike matematickej gramotnosti. V tomto druhom polroku školského roka 2020/2021 sa členovia klubu plne venovali príprave žiakov na testovania – T9 a Maturita z matematiky. Pritom sa venovali aj témam, ktoré boli naplánované na tento polrok. Žiaľ pandemická situácia aj v tomto roku značne zmenila priebeh práce a prípravu na dané testovania. Prínosom doterajšej spolupráce členov klubu bolo, že doterajšie výstupy – zbierky úloh – bolo možné už využívať aj v tomto období. Zo skúseností na krúžkoch vyplýva, že zbierky úloh obsahujú vhodné úlohy a dostatočné množstvo na precvičovanie a prehlbovanie daného tematického celku.

Písomný výstup pedagogického klubu pre matematickú gramotnosť vychádza z potrieb prípravy žiakov na rôzne testovania. Členovia klubu sa rozhodli, že vytvoria ďalšie materiály – zbierky úloh – s ktorými vytvoria postupy na zlepšenie výsledkov žiakov a zvýšenie matematickej gramotnosti žiakov. Vytvorené zbierky budú obsahovať úlohy podľa jednotlivých tematických celkov a v nich úlohy budú stavané podľa kognitívnej úrovni. Budú sa venovať témam: využívanie matematických hier na hodinách matematiky, finančnej gramotnosti, kombinatorike, pravdepodobnosti, štatistike, v štatistike aj úlohám riešiteľných s počítačovým programom Excel, logike, dôkazom v matematike.

Úlohy budú rozvíjať matematickú, aj čitateľskú gramotnosť žiakov a rozvíjajú ich kreativitu, IKT zručnosti, schopnosť riešiť problémové úlohy. Tieto materiály pripoja k materiálom z predchádzajúcich období.

Kľúčové slová

- obsahový a výkonový štandard v uvedených predmetoch,
- kompetencie,
- matematická gramotnosť, čitateľská gramotnosť, IKT gramotnosť,
- metódy a formy moderného vyučovania,
- zbierky úloh,
- hry na hodinách matematiky,
- finančná gramotnosť,
- kombinatorika,
- štatistika,
- Excel,
- pravdepodobnosť,
- logika,
- dôkazy.

Zámer a priblíženie témy písomného výstupu

Tak ako v predchádzajúcich obdobiach zámerom stretnutí je výmena skúseností medzi členmi klubu, ako aj získavanie nových poznatkov v rámci moderných metód vyučovania, vymieňanie skúseností a osvedčených postupov v príprave žiakov na dôležité testovania z matematiky.

Témy písomného výstupu:

1. Zbierka úloh obsahujúca úlohy na tému Matematické hry. Úlohy určené podľa kognitívnej úrovne Bloomovej taxonómie.
2. Zbierka úloh obsahujúca úlohy na finančnú gramotnosť.
3. Zbierka úloh obsahujúca úlohy Kombinatoriky – permutácie, varácie, kombinácie. Úlohy určené podľa kognitívnej úrovne Bloomovej taxonómie.
4. Zbierka úloh obsahujúca úlohy na tému Pravdepodobnosť. Úlohy určené podľa kognitívnej úrovne Bloomovej taxonómie.
5. Zbierka úloh obsahujúca Štatistické úlohy, riešiteľné aj s využitím programu Excel.
6. Zbierka úloh obsahujúca úlohy z Logiky.
7. Zbierka úloh obsahujúca úlohy na dôkazy v matematike. Úlohy určené podľa kognitívnej úrovne Bloomovej taxonómie.

Jadro:
Popis témy/problém

V rámci písomného výstupu pedagogického klubu pre matematickú gramotnosť boli v druhom polroku školského roka 2020/2021v činnosti klubu rozpracované nasledujúce témy a materiály:
1.)
V tomto druhom polroku sa členovia klubu plne venovali príprave žiakov na testovania – T9 a Maturita z matematiky, pritom sa venovali aj témam, ktoré boli naplánované na tento polrok. Žiaľ pandemická situácia nedovolila vyučovanie v školských podmienkach, preto aj príprava a samotné krúžky mali iný priebeh. Krúžky ako také prebiehali v online priestore na Zoom-e, preto ich možno viac nazvať, ako stretnutia, kde žiaci riešili rôzne matematické úlohy. O písomných maturitách sa rozhodlo dosť skoro(koncom marca) – zrušilo sa aj v tomto školskom roku – teda príprava žiakov sa sústredila na ústnu maturitnú skúšku. Príprava žiakov na Testovanie 9 prebiehala v plnom prúde cez spomenuté stretnutia v online priestore. Keď sa žiaci vrátili do školských priestorov už v plnom prúde prebiehali krúžky na prípravu a precvičovanie. Venovalo sa témam: Riešenie slovných úloh pomocou rovnice, Riešenie sústavy rovníc, Riešenie nerovníc, Vyjadrenie neznámej zo vzorca, Lineárna funkcia, Prienik funkcie s osou x a s osou y, Uhly v matematike, Výpočet obsahu trojuholníka, mnohouholníka, Výpočet obvodu a obsahu štvoruholníkov, Výpočet obvodu a obsahu kruhu.

Na precvičovanie týchto tém sa využili a odskúšali doteraz vytvorené zbierky úloh. Na základe skúseností na krúžkoch vyplýva, že zbierky úloh obsahujú vhodné úlohy a dostatočné množstvo na precvičovanie a prehlbovanie daného tematického celku.

V príprave na testovanie T9 poskytlo Núcem Etestovanie9 – jar 2011 test z matematiky. Do tohto testovania sme sa zapojili a žiaci dosiahli nasledovné výsledky:

Názov testu	Predmety testu	Trieda žiaka	Percentil žiaka	Úspešnosť žiaka
T_MAT_9.roc.ZS_jar2021	Matematika	IV.O	94,4	93,3
T_MAT_9.roc.ZS_jar2021	Matematika	IV.O	91,6	90,0
T_MAT_9.roc.ZS_jar2021	Matematika	IV.O	87,6	86,7
T_MAT_9.roc.ZS_jar2021	Matematika	IV.O	87,6	86,7
T_MAT_9.roc.ZS_jar2021	Matematika	IV.O	83,0	83,3
T_MAT_9.roc.ZS_jar2021	Matematika	IV.O	83,0	83,3
T_MAT_9.roc.ZS_jar2021	Matematika	IV.O	78,6	80,0
T_MAT_9.roc.ZS_jar2021	Matematika	IV.O	73,8	76,7
T_MAT_9.roc.ZS_jar2021	Matematika	IV.O	68,8	73,3
T_MAT_9.roc.ZS_jar2021	Matematika	IV.O	68,8	73,3
T_MAT_9.roc.ZS_jar2021	Matematika	IV.O	64,2	70,0
T_MAT_9.roc.ZS_jar2021	Matematika	IV.O	59,2	66,7
T_MAT_9.roc.ZS_jar2021	Matematika	IV.O	39,4	53,3
T_MAT_9.roc.ZS_jar2021	Matematika	IV.O	39,4	53,3
T_MAT_9.roc.ZS_jar2021	Matematika	IV.O	26,9	43,3
T_MAT_9.roc.ZS_jar2021	Matematika	IV.O	26,9	43,3
T_MAT_9.roc.ZS_jar2021	Matematika	IV.O	16,6	33,3
T_MAT_9.roc.ZS_jar2021	Matematika	IV.O	16,6	33,3
T_MAT_9.roc.ZS_jar2021	Matematika	IV.O	16,6	33,3
T_MAT_9.roc.ZS_jar2021	Matematika	IV.O	13,7	30,0

Priemerná úspešnosť celého výskumného súboru bola 57.1%.

Priemerná úspešnosť žiakov Vašej školy bola 64.3%.

Z minulých výstupov:

„Z výsledkov etestovania T9 a maturity zistili potrebu týchto testov, aby žiaci vhodným spôsobom zvládli dôležité testovania, ako sú testovanie T9 a Maturita z matematiky, aby žiaci dosiahli porovnateľné alebo lepšie výsledky ako je celoslovenský priemer a výsledok škôl podobnými veľkosťami a zameraním. S tým súvisí cielená príprava žiakov na rôzne testy z matematiky - inovovať a prispôsobovať výber a typ úloh."

Z priloženej tabuľky vidíme, že cieľ, ktorý sme si sformulovali sme splnili. Avšak z tabuľky vidíme aj to, že v príprave žiakov máme ešte rezervy, lebo boli žiaci, ktorí majú ešte nedostatky.

Žiaľ testovanie T9 sa v poslednej chvíli tiež zrušilo, preto tieto výsledky sme napokon nepotvrdili v testovaní T9. Teda tieto výsledky vnímame ako smerodajné.

2.)

V tomto období naďalej práca a písomný výstup pedagogického klubu pre matematickú gramotnosť vychádzala z týchto potrieb. Členovia klubu sa rozhodli, že vytvoria materiály – zbierky úloh – s ktorými vytvoria postupy na zlepšenie výsledkov žiakov a zvýšenie matematickej gramotnosti žiakov. Vytvorené zbierky budú obsahovať úlohy podľa jednotlivých tematických celkov a v nich úlohy budú stavané podľa kognitívnej úrovni. Boli to témy: Hry na hodinách matematiky, finančná gramotnosť, kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika, logika a dôkazy.

Podľa návrhu klubu z minulého obdobia členovia postupne vytvárali zbierku úloh podľa cieľových požiadaviek z matematiky pre jednotlivé tematické okruhy.

Členovia klubu sa dohodli, že pri výbere úlohy do zbierky úloh budú dbať na úrovne podľa Bloomovej taxonómie: Úlohy vyžadujúce: pamäťové reprodukovanie poznatkov, jednoduché myšlienkové operácie s pojmami, zložité myšlienkové operácie s pojmami, prezentáciu poznatkov, tvorivé myslenie.

Členovia klubu určili, že úlohy je možné riešiť 3 rôznymi spôsobmi: metóda pokusu a omylu, metódou algoritmov, riešenie metódou Heuristých. Heuristika je metóda tvorivého riešenia problémov. Žiaci sa pri tom aktívne zúčastňujú na objavovaní nových poznatkov.

Pri riešení úloh viesť žiakov na nasledujúci postup: pochopenie úlohy, koncepcia plánu, realizácia plánu, kontrola riešenia.

Podľa testov sú príklady dvojakého typu: úlohy s otvorenou odpoveďou a úlohy s výberom odpovedí. V zbierke teda budú úlohy podľa týchto typov.

Zbierky budú obsahovať aj úlohy riešiteľné s počítačovým programom Excel – hlavne štatistické.

Každý člen pedagogického klubu doteraz pracoval s vlastnými zbierkami úloh. Pri tejto spolupráci sa vytvoria spoločné jednotné zbierky úloh, ktoré v budúcnosti členovia vedia využiť pri príprave žiakov na rôzne testovania. Tieto zbierky zostávajú ale otvorené, v ktorých je možné meniť úlohy ale hlavne rozšíriť dané úlohy.

Úlohy budú rozvíjať matematickú, aj čitateľskú gramotnosť žiakov a rozvíjajú ich kreativitu, IKT zručnosti, schopnosť riešiť problémové úlohy. Tieto materiály pripoja k materiálom z predchádzajúcich období.

Záver:
Zhrnutia a odporúčania pre činnosť pedagogických zamestnancov

- členom klubu odporúčame zakomponovať vyhotovené materiály do výchovno-vzdelávacieho procesu
- členovia klubu poskytnú po implementácii pripravených materiálov ostatným členom spätnú väzbu
- členom klubu odporúčame preferovať moderné vyučovacie metódy, ktoré majú motivujúci charakter a rozvíjajú tvorivosť a samostatnosť v myslení, ako aj tímovú spoluprácu

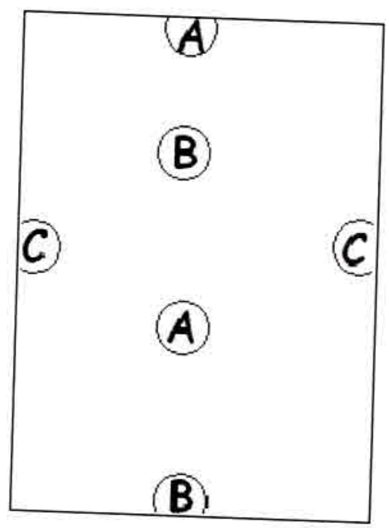
11. Vypracoval (meno, priezvisko)	Zsolt Főző
12. Dátum	1.7.2021
13. Podpis	
14. Schválil (meno, priezvisko)	Beáta Molnár
15. Dátum	1.7.2021
16. Podpis	Molnár

Játékok - Matematikai játékok

1. *Pont-vonal játékok*

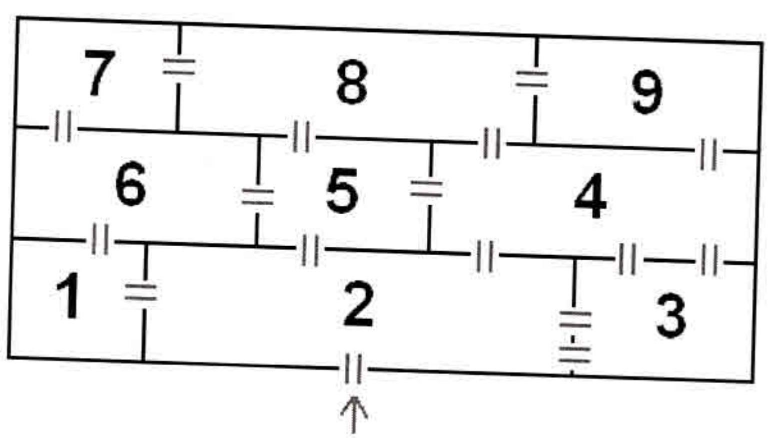
A) Kösd össze, ha tudod!

Rajzold le az alábbi ábrát egy papírra, majd próbáld meg összekötni A-t A-val, B-t B-vel, C-t C-vel három folytonos vonallal úgy, hogy a vonalak ne keresztezzék egymást, és ne menjenek le a papírról!



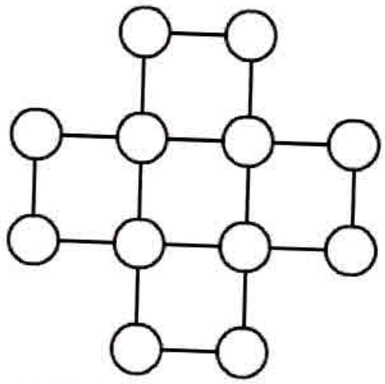
B) Euler-tétel a palotában

Az ábrán egy királyi palota alaprajza látható. Egy király minden reggel elmegy sétálni a palota körüli erdőbe. Ezután bemegy a palotába, és minden ajtón keresztül megy pontosan egyszer. Legvégül leül a trónteremben. Melyik helyiség a trónterem?

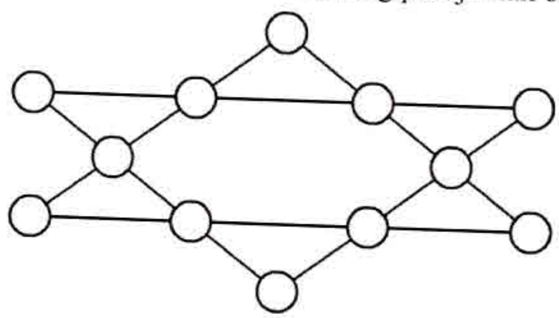


2. *Ábrák kitöltése számokkal*

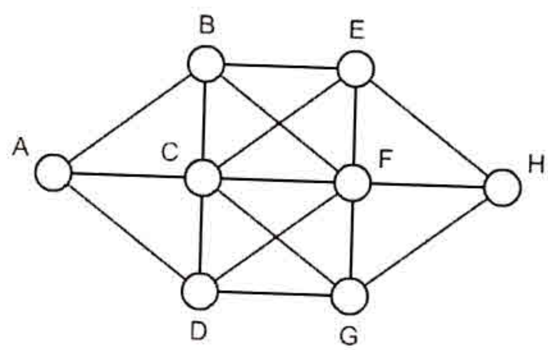
A) Írjunk a körökbe számokat 1-től 12-ig úgy, hogy a számok összege minden négyzet csúcsaiban 26 legyen.



B) Írjunk a körökbe számokat 1-től 12-ig úgy, hogy a számok összege a csillagalakzat külső hat pontján kétszer nagyobb legyen, mint a belső hatszög pontjainak összege.



C) Írjunk a körökbe számokat 1-től 8-ig úgy, hogy szakasszal összekötött körökben nem lehetnek egymást követő számok. (Ha az A körben van a 3, akkor a B, C, D körökben nem lehet sem a 2, sem a 4.)



3. *Számok a betűk mögött*

Helyettesítsük a betűket számokkal (különböző betűknek különböző számok felelnek meg):

a)

$$\begin{array}{r} ABC \\ AB \\ +\quad C \\ \hline 300 \end{array}$$

b)

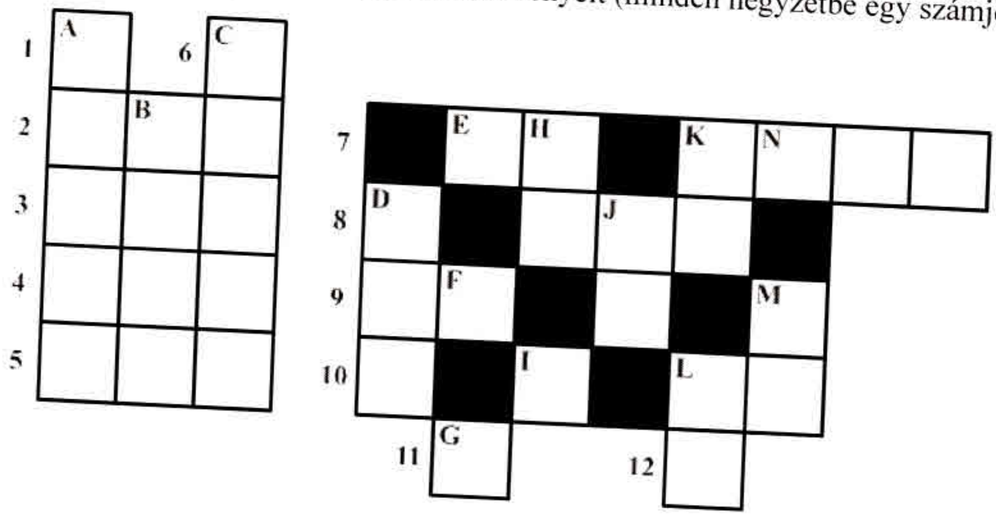
$$\begin{array}{r} MATEK \\ MATEK \\ +MATEK \\ \hline VANEK \end{array}$$

c) $AA^{N}=ANNA$

(AA kétjegyű szám)

4. *Matematikai keresztrejtvények*

A) Írd be a keresztrejtvénybe a műveletek eredményeit (minden négyzetbe egy számjegyet)!

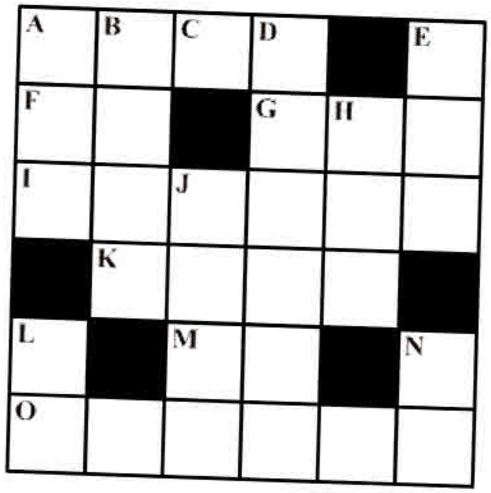


Vízszintes:
1. 586 : 586
2. 1 . 257
3. 21 . 21
4. 778 : 2
5. 263 . 2
6. (208 : 52) . 2
7. 1575 : 105 ; 23 . 100
8. (15972 : 11) : 1452 ; 233 . 4
9. 368 : 16 ; 3 . 3 ; 776 : 97
10. (1 . 1) : 1 ; 6080 : 1520 ; 10 . 4
11. (378 : 378) . 1
12. 324 : 54

Függőleges:

A. 829 . 15
B. 2741 . 2
C. 2 . 21799 . 2
D. (11 . 11 . 3) : 3
E. 1 . 1 . 1 . 1
F. 468 : 156
G. (1 . 34) : (34 . 1)
H. 1416 : 24
I. [(360 : 40) : 9] . 4
J. 13 . 3
K. 2 . 11
L. 598 : 13
M. 4 . 10 . 2
N. 3 . 1

B) Írd be a keresztrejtvénybe a feladatok megoldását (minden négyzetbe egy számjegyet)!



Vízszintes:

A. Ebben az évben született Bolyai János matematikus
F. Ennyiféleképpen léphetünk fel a hatodik lépcsőfokra, ha egyszerre csak egy, vagy két lépcsőfokot léphetünk.
G. A négyszög belső szögeinek összege
I. A legnagyobb 2003-mal osztható hatjegyű szám
K. A VIII és a CMVII számok szorzata
M. Egyforma számjegyek
O. Az ABC háromszögben az a szög 4-szer nagyobb, mint a b szög, a g szög 27°-kal nagyobb, mint az a. Mekkora az a, b, g szög nagysága? (ebben a sorrendben)

Függőleges:

A. Egy egyjegyű szám és a tőle tízzel nagyobb szám szorzata
B. A bot 27 cm hosszú. Hány cm hosszú 311 ilyen bot?
C. "Semmi"
D. 67-re végződő szám, 67-tel osztható szám, és ha a számot az utolsó két számjegy nélkül írjuk le, akkor is osztható lesz 67-tel
E. 500 tanulóból 308-nak van telefonja, 309-nek van kerékpárja. 90 tanulónak nincs se telefonja, se kerékpárja. Hány tanulónak van telefonja és kerékpárja is?
H. Ennyi óráig tart a február szökőévben
J. A 21 cm élű kockát szétvágtuk 1 cm élű kockákra.
Ha ezeket a kis kockákat egymás mellé raknánk egy sorba, milyen hosszú sort kapnánk?
L. A négyzet területe 12-vel több, mint a kerülete. Mekkora a négyzet területe?
N. Gondoltam egy számot, hozzáadok nyolcat, az eredményt megszorzom kettővel, ebből kivonok hatot, és az eredményt elosztom öttel, akkor 12-t kapok.
Milyen számra gondoltam?

5. *Játék a számokkal*

A megoldásban a megadott számok mindegyikét egyszer használjuk, sorrendjük tetszőleges, hozzájuk alkalmasan megválasztjuk a műveleteket (összeadás, kivonás, szorzás, osztás), használhatunk zárójeleket is. A számokból nem képezhetünk többjegyű számot.

A) Állítsd elő a 4-et a 2, 5, 6, 8 segítségével.
B) Állítsd elő a 40-et a 4,6, 8, 8 segítségével.
C) Állítsd elő a 17-et a 1, 2, 6, 7 segítségével.
D) Állítsd elő a 31-et a 1, 2, 6, 7 segítségével.
E) Állítsd elő a 80-et a 1, 3, 6, 9 segítségével.

6. *Játékos fejtörők*

A) Oroszlánok a szigeten

Egy szigeten 10 matematikus oroszlán él. A gondozójuk reggel bedob egy szelet húst a szigetre.
- Ha egy oroszlán megeszi a húst, akkor maga is húsdarabbá változik napnyugtáig, így a többiek megehetik.
- Ha egy oroszlán nem eszik húst egy nap, akkor másnapra elpusztul.
- Egy oroszlán inkább éhenpusztul, minthogy megegyék.

Másnap reggel mit tapasztal a gondozó a szigeten?

B) Melyik ajtót válasszam?

Rabságban senyvedünk a szultán udvarában. A következő ajánlatot teszi a szultán: választanunk kell két ajtó közül. Az egyik mögött a szabadság, a másik mögött két éhes oroszlán vár. Egyet kérdezhetünk az őröktől az ajtókkal kapcsolatban és utána döntenünk kell. Egy bökkenő azért van. Az egyik őr mindig hazudik, a másik mindig igazat mond, de nem tudjuk, melyik. Mit kérdezzünk az egyik őrtől, hogy lehetőleg ép bőrrel megússzuk?

C) Milyen színű a medve?

Egy vadász elindul délnek és megy 100 métert, utána keletre fordul és megy 200 métert, majd ismét 100 métert megy északnak. Ezzel visszaérkezett a kiindulási helyére. Ebben a pillanatban meglát egy medvét és lepuffantja szegényt. Milyen színű volt a medve?

D) Mikor van a szülinapja?

Egy embernek szülinapja volt és megkérdezték tőle:
- Emlékszik, hogy mit csinált éppen egy évvel ezelőtt?
- Hát erre egészen vétletlenül pontosan emlékszem: Az Északi sarkon voltam éppen és a jégkunyhómból kikandikálva megcsodálhattam a napfelkeltét.

Vajon mikor van az illető szülinapja?

E) A kecske, a káposzta, no meg a farkas

Van egy folyó, amin át kellene kelnünk. Adott egy csónak is, amiben egyszerre csak egy dolgot vihetünk magunkkal a túlpartra. A feladat az, hogy átvigyük a kecskét, a káposztát, no meg a farkast. A probléma ott van, hogy ha magára hagyom a kecskét a káposztával, akkor a káposztának annyi. Hasonlóan a farkas is megeszi a kecskét, ha nem vagyunk ott. Hogyan vigyük át őket, hogy mind megmaradjanak (egyben)?

F) Égesd a kötelet!

Kapsz két kötelet, amikről tudod, hogy ha meggyújtod a végét, akkor éppen 1 óra alatt ég végig, valamint nem hajtogathatók. Nincs nálad óra, a feladatod az, hogy mérj ki negyed órát.

Projekt – pénzügyi ismeretek

Projektfeladat:

1.feladat: Kitölteni egy adóbevallást!

33. Segíts kitölteni Serény Jani adóbevallását! Az éves jövedelem Jani bruttó jövedelme. Biztosítási díjat nem fizetett. Az adóalap-csökkentés az éves adómentes résszel egyenlő. A munkáltató a Munkatörvénykönyv 34. §-a értelmében fizette be Jani adóelőlegét.

DPFOAv07_1

FO typ: A

DAŇOVÉ PRIZNANIE

K DANI Z PRÍJMOV FYZICKEJ OSOBY

pre daňovníkov, ktorí majú príjmy len zo závislej činnosti

podľa § 5 zákona č. 595/2003 Z. z. o dani z príjmov v znení neskorších predpisov (ďalej len „zákon")

Číselné údaje sa zarovnávajú vpravo, ostatné údaje sa píšu zľava. Nevyplnené riadky sa ponechávajú prázdne.

Údaje sa vypĺňajú paličkovým písmom (podľa tohto vzoru), písacím strojom alebo tlačiarňou, a to čiernou alebo tmavomodrou farbou

A Á B Č D É F G H I J K L M N O P Q R Š T Ú V X Ý Ž 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

01 - Rodné číslo (DIČ): 920401 / 5711

02 - Dátum narodenia: . .

Riadok 02 sa vypĺňa, len ak ide o daňovníka, ktorý nemá trvalý pobyt na území Slovenskej republiky

Druh daňového priznania
- X daňové priznanie
- opravné daňové priznanie
- dodatočné daňové priznanie

(vyznačí sa x).

Za rok 2008

Dátum zistenia skutočností na podanie dodatočného daňového priznania . . 200

I. ODDIEL - ÚDAJE O DAŇOVNÍKOVI

03 - Priezvisko: SERÉNY

04 - Meno: JÁNOS

05 - Titul:

Úhrn príjmov od všetkých zamestnávateľov		32	,
Základ dane (r. 32)		36	,
Zníženie základu dane podľa § 11 zákona	ods. 2 - na daňovníka	37	,
	ods. 3 - na manželku (manžela)	38	,
	ods. 4 písm. a) - príspevky na doplnkové dôchodkové sporenie	39	,
	ods. 4 písm. b) - účelové sporenie	40	,
	ods. 4 písm. c) - poistné na životné poistenie	41	,
	Úhrn r. 39 až 41 *(ak úhrn r. 39 až 41 presahuje sumu 398,33 eur, uvádza sa na r. 42 suma 398,33 eur)*	42	,
	Spolu (r. 37 + r. 38 + r. 42)	43	,
Základ dane znížený o sumu z r. 43 (r. 36 - r. 43) (ak je suma na r. 43 vyššia ako na r. 36, uvádza sa na r. 44 nula)		44	,
Daň podľa § 15 zákona zaokrúhlená na eurocenty nadol zo základu dane z r. 44		45	,
Úhrn preddavkov na daň	zaplatených podľa § 34 ods. 6 a 7 zákona	61	,
	zrazených podľa § 35 zákona	62	,
Daň na úhradu r.45 - r. 61 (+)		64 +	,
Daňový preplatok r.45 - r. 61 (-)		65 -	,

2. feladat: Ellenőrizd le az egyik szülőd vagy egy kitalált személynek a fizetési szalagját!

AMIT BIZONYÁRA MEGJEGYZÜNK, HA EGY ÚJ MUNKAADÓVAL MUNKASZERZŐDÉST KÖTÜNK, A HAVI BÉR ÖSSZEGE. EZT A HAVI ÖSSZEGET, AMIBEN MEGEGYEZTÜNK, HAVI BRUTTÓ BÉRNEK NEVEZZÜK („BRUTT… 670 € A HAVI KERESETEM"). A HAVI NETTÓ KERESET – AMELYET TÉNYLEGESEN „KÉZHEZ KAPUNK" VAGY A FOLYÓSZÁMLÁNKRA UTALNAK – ENNÉL ALACSONYABB ÖSSZEG.

A BRUTTÓ BÉRBŐL UGYANIS A MUNKAADÓ LEVONJA AZ ADÓELŐLEGET ÉS A MUNKAVÁLLALÓI JÁRULÉ… (LÁSD A TÁBLÁZATOT). EZEKET AZ ÖSSZEGEKET A MUNKAADÓ A NEVÜNKBEN ÁTUTALJA AZ ADÓHIVA… TALBA ÉS AZ ILLETÉKES (SZOCIÁLIS VAGY TÁRSADALMI ÉS EGÉSZSÉGÜGYI) BIZTOSÍTÓKBA.

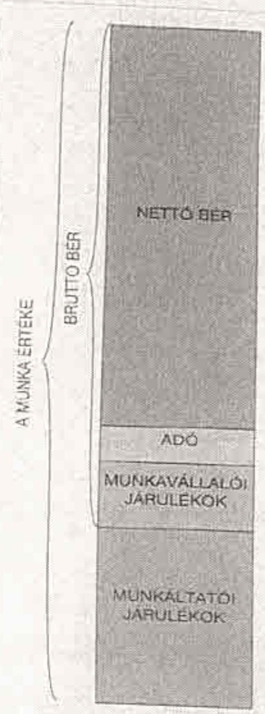
A BIZTOSÍTÓKBA A MUNKÁLTATÓ A MUNKAVÁLLALÓTÓL LEVONT ÖSSZEGEKEN TÚL TOVÁBBI ILLETÉKE… IS KÖTELES BEFIZETNI (EZEK A MUNKÁLTATÓI JÁRULÉKOK – LÁSD A TÁBLÁZATOT).

A LEVONÁSOK KISZÁMÍTÁSÁHOZ AZ EGYES JÁRULÉKOK SZÁZALÉKOS MÉRTÉKÉN KÍVÜL (AMELYET 20… ÉVRE EGY TÁBLÁZATBAN FOGLALTUNK ÖSSZE) ISMERNÜNK KELL A KIVETÉSI ALAPOT IS (TEHÁT AZT A… ÖSSZEGET, AMELYBŐL AZ ADOTT SZÁZALÉKÉRTÉKEKET KISZÁMÍTJÁK). HOGY EGYSZERŰBBÉ TEGYÜK A MEGÉRTÉST, FELTÉTELEZZÜK, HOGY A KIVETÉSI ALAP MINDEN ESETBEN A BRUTTÓ BÉRREL EGYENL… (RENDSZERINT EZ ÍGY IS VAN). UGYANCSAK AZ EGYSZERŰSÉG KEDVÉÉRT FIGYELMEN KÍVÜL HAGYJUK A CSALÁDI ADÓKEDVEZMÉNYEKET, A BÉRTÉRÍTÉST ÉS EGYÉB APRÓ RÉSZLETEKET.

	LEVONÁSOK	
	MUNKAVÁLLALÓI JÁRULÉKOK (A MUNKAVÁLLALÓTÓL VONJÁK LE)	MUNKÁLTATÓI JÁRULÉKOK (A MUNKÁLTATÓ FIZETI BE)
EGÉSZSÉGBIZTOSÍTÁS	4,00 %	10,00 %
BETEGBIZTOSÍTÁS	1,40 %	1,40 %
ÖREGSÉGINYUGDÍJ-BIZTOSÍTÁS	4,00 %	14,00 %
ROKKANTNYUGDÍJ-BIZTOSÍTÁS	3,00 %	3,00 %
BALESETBIZTOSÍTÁS		0,80 %
BIZT. MUNKANÉLKÜLISÉG ESETÉRE	1,00 %	1,00 %
GARANCIÁLIS BIZTOSÍTÁS		0,25 %
TARTALÉKALAP		4,75 %
ADÓELŐLEG	A MUNKAVÁLLALÓI JÁRULÉKOKKAL ÉS A HAVI ADÓMENTES RÉSZ MINIMUMÁVAL CSÖKKENTETT HAVI BRUTTÓ BÉR 19%-A	

NETTÓ HAVI BÉRÜNK NAGYSÁGÁT A BÉRJEGYZÉKBŐL OLVASHATJUK LE, AMELY (EGYÉB ADATOK MELLETT) AZ ALÁBBI ADATOKAT TARTALMAZZA:

- A BRUTTÓ BÉRT ÉS A MUNKAVÁLLALÓI JÁRULÉKOKAT;
- AZ ADÓELŐLEG ÉRTÉKÉT – AMI NEM MÁS, MINT A MUNKAVÁLLALÓI JÁRULÉKOKKAL ÉS 287,27 €-VAL (TEHÁT A HAVI ADÓMENTES RÉSSZEL, AMELY 2009 JANUÁRJÁBAN 286,27 € VOLT) CSÖKKENTETT BRUTTÓ JÖVEDELEM MARADÉKÁNAK A 19%-A;
- A NETTÓ BÉRT – AMELYET ÚGY KAPUNK MEG, HA A BRUTTÓ JÖVEDELEMBŐL LEVONJUK AZ ADÓELŐLEGET ÉS A MUNKAVÁLLALÓI JÁRULÉKOKAT;
- A MUNKA ÉRTÉKÉT – AMELY A BRUTTÓ BÉR ÉS A MUNKÁLTATÓI JÁRULÉKOK ÖSSZEGE. A MUNKA ÉRTÉKE TEHÁT AZT FEJEZI KI, HOGY „MENNYIBE KERÜLSZ" A MUNKÁLTATÓDNAK.



BÉRJEGYZÉK

Kornélia Krásna, február 2009

Základný plat tarifný	741,00	Odpočet daňovník	286,27
Osobný príplatok	216,00	Základ dane	542,50
HRUBÁ MZDA	957,00	Daň zo mzdy – preddavok	103,07
HRUBÝ PRÍJEM	957,00	ČISTÝ PRÍJEM	725,70
Zdravotné P – zamestnanec	38,28	Zdravotné P	95,70
Nemocenské P – zamestnanec	13,39	Nemocenské P	13,39
Starobné P – zamestnanec	38,28	Starobné P	133,90
Invalidné P – zamestnanec	28,71	Invalidné P	28,71
P v nezamestnanosti – zamestnanec	9,57	P v nezamestnanosti	9,57
Poistné celkom – zamestnanec	128,23	Úrazové P	7,65
		Rezervný fond	45,45
		CELKOVÁ CENA PRÁCE	1291,37

Feladatok - gyakorlásra:

1.

Alex kapott egy új nadrágot, aminek a nettó ára 3000 forint, az áfakulcs pedig 27%, es a könyvesboltból egy könyvet, amiért 1200 forint plusz 5% áfát kellett fizetni.

a) Mennyi a nadrág fogyasztói ára?

....

b) Mennyi a könyv fogyasztói ára?

....

c) Mennyi áfát kell fizetni a két termék után az államnak?

....

d) Tulajdonképpen kinek a „zsebét terheli" az általános forgalmi adó?

....

2.

Szandrát a szülei megkérték, hogy hozzon a közeli boltból:

• három liter tejet, amelynek a fogyasztói ára (amelyben mindig benne van az általános forgalmi adó is) 210 forint/liter, az áfakulcsa pedig 5%,

• öt pohár gyümölcsjoghurtot, ennek fogyasztói ara 160 forint/pohár, áfakulcsa 18%,

• és egy mikrózható popcornt, ami az általános forgalmi adóval együtt 120 forintba kerül, az áfakulcsa 27%.

a) Mennyit fog fizetni Szandra összesen?

....

b) Hány forint általános forgalmi adót fizet Szandra összesen?

....

3.

Egy újságíró átlagosan havi 399 430 forintot keres havi 184 óra munkával, egy szállodai recepciós havi átlagfizetése pedig 179 681forint, és ezért 216 órát dolgozik egy hónapban. Ugyanakkor egy gyorséttermi diákmunkás csak 156 901 forintot keres 176 óranyi munkával.

a) A diákmunkás havi keresete hány százaléka a recepciós havi keresetének?

....

b) A recepciós havi kereste hány százaléka a diákmunkás havi keresetének?

....

c) A diákmunkás órabére hány százaléka az újságíró órabérének?

....

d) Hány percet kell dolgoznia a diákmunkásnak, a recepciósnak és az újságírónak egy nagy, 800 forintos hamburgerért?

....

4.

Ábel iskolájában rendszeresen van adventi vásár, ahol a tanulók a maguk készítette tárgyakat, ennivalókat adhatják el, és a bevételt az iskolájuktól kétutcányira levő gyermekotthonnak adják. Ábel 25 darab pogácsát sütött, és sikerült is mindegyiket eladnia.

A táblázatban megadtuk a pogácsákhoz felhasznált alapanyagok mennyiségét és árát:

Alapanyag	Mennyiség	Ár
liszt	fél kg	140 forint/kg
tejföl	150 g	130 forint/150 g
tojás	4 darab	40 forint/darab
élesztő	5 dkg	100 forint/5 dkg
tej	2 dl	200 forint/liter
vaj	20 dkg	650 forint/20 dkg
burgonya	75 dkg	200 forint/kg

a) Mennyi volt az előállítási költsége a 25 pogácsának?

b) Mennyi volt az előállítási költsége (ezt önköltségnek nevezik) egy darab pogácsának?

c) Mennyibe kerüljön egy pogácsa, ha Ábel a pogácsába fektetett pénzzel 15% hozamot szeretne elérni? A hozam az összes bevétel es az összes költség különbsége.

d) Mennyi pénzt tudott a gyermekotthonnak felajánlani Ábel, ha a teljes bevételét nekik szánja?

e) Hány százalék lenne a haszon, ha 100 forintért adna egy pogácsát?

f) Ha 5000 forint bevételt akar elérni a százforintos pogácsákból, akkor mennyi pénzt kell befektetnie az alapanyagokba?

5.

Áron végre elmúlt 15 éves, és a nyári szünetben egy diákszövetkezet segítségével rögtön munkát is vállalt, mert egy laptopot szeretne vásárolni. Munkáját órabérben fizetik, ami azt jelenti, hogy a keresetet nem egy hónapra határozzák meg, hanem egy órára. Minden hónap végén a ledolgozott órai számát megszorozzak az órabérével, és így jön ki, hogy mennyi fizetést fog kapni. Áron órabére 1100 forint, és júliusban 90 órát dolgozott.

a) Mennyi volt Áron júliusi bruttó – azaz levonások nélküli – keresete?

b) Mennyi volt a nettó – vagyis a levonásokkal csökkentett, azaz a kézhez kapott – keresete, ha diákmunka esetén csak a 15% személyi jövedelemadó- előleget kell levonni a béréből?

c) Hány órát kell dolgoznia összesen Áronnak, ha a vágyott laptop 170 000 forintba kerül, és van már 29 750 forint megtakarítása?

d) Mennyi a laptop nettó (áfa nélküli) ára, ha az áfakulcs 27%?

6.

Boltos Bori a megnövekedett forgalom miatt új hűtőpultot vásárolt a kisboltjába, amelyet 8 évig fog használni. A hűtőpult minden évben ugyanannyit veszít az értékéből, vagyis az amortizációja minden évben azonos, a 8. év végére a hűtőpult nulla forintot ér.

a) Hány százalékot veszít évente az eredeti értékéből a hűtőpult?

b) Az ötödik év után az eredeti értékének hány százalékát éri a hűtőpult?

c) Mennyi volt a hűtőpult értékcsökkenése 3 év alatt, ha az eredeti ára 420 000 forint volt?

7.

Nemcsak egyes cégek, de az állam is sokfele adatot gyűjt es elemez. Magyarországon a Központi Statisztikai Hivatal látja el az államot statisztikai adatokkal, elemzésekkel. Tőluk tudjuk, hogy Magyarországon a vállalatok 35 420 000 000 000 forint értékű terméket és szolgáltatást állítottak elő 2016-ban, 2012-ben viszont még csak 28 781 000 000 000 forintnyit.

a) Olvasd el, es mondd ki hangosan a 2012-es es 2016-os termelés értékét!

b) Írd fel normálalakban a 2012-es es a 2016-os termelési értéket!

8.

Magyarorszagon a GDP (ejtsd: dzsidipi) értéke 2016-ban 35 420 000 000 000 forint volt, de 2017-ben már 36 872 220 000 000 forint. A GDP azt mutatja, hogy a hazai vállalatok hány forint értékben állítottak elő olyan terméket és szolgáltatást ...

három betűje egy angol rövidítést takar: **gross domestic product, amit magyarul bruttó hazai terméknek mondunk.**

a) Hány százalékkal nőtt a GDP 2017-ben 2016-hoz képest?

b) A 2017-es GDP hány százaléka a 2016-os értéknek?

c) Hány százalékkal volt alacsonyabb 2016-ban a GDP, mint a 2017-ben? Miért kaptunk más eredményt, mint az *a)* kérdésben?

d) Az országok teljesítményének összehasonlítására gyakran alkalmaznak egyetlen valutát. Ez nagyon gyakran az amerikai dollár, vagy európai országok esetében az euro. 2016-ban a magyarországi GDP 124 380 000 000 dollár volt. Milyen árfolyamon számoltak ki ezt? **(Az árfolyam a dollár és a forint közötti átváltási arányt mutatja meg.)**

9.

Márk apukája egyéni vállalkozó, taxiskent dolgozik. Éppen most vásárolt új autót, 6 500 000 forintot költött rá. Úgy tervezi, hogy ezzel az autóval 400 000 kilométert tesz meg. Tapasztalatból tudja, hogy egy évben átlagosan 50 000 kilométert fut az autó. A 400 000 kilométer megtétele után az autót 500 000 Ft-ért tudja majd eladni.

Az autó átlagfogyasztása 7,5 liter benzin 100 kilométerenként. A benzin ára az első évben 360 forint/liter, és Márk apukája úgy számol, hogy évente átlagosan öt forinttal emelkedik majd a benzin ára.

a) Írd be a táblázatba az adatokat!

Megnevezés	Számadat (érték és mértékegység)
Autó vételára	
Tervezett összes kilométer	
Tervezett éves kilométer	
Autó eladási ára	
Autó átlagfogyasztása	
Benzin ára az első évben	
Ennyit emelkedik a benzin ára egy-egy évben	

b) Hány évig fogja használni az autóját Márk apukája?

c) Ha kilométerenként 300 forintot kér az utasoktól, ebből (mármint a kilométerenkénti díjból) mennyit tegyen félre, hogy meg tudja venni a következő kocsit, ha ez lefutotta a 400 000 kilométert, es úgy számol, hogy ugyanannyi pénzért tud majd akkor új autót venni, mint most?

d) Terve szerint hány liter benzint fog összesen tankolni Márk apukája, amíg ezt az autót használja a taxizásra?

e) Összesen mennyi pénzt fog kiadni benzinre a harmadik évben a tervei szerint?

10.

Találtam egy megtakarítási lehetőséget: ha két évre lekötöm a pénzemet, akkor az első évben 5%-ot kamatozik, a másodikban azonban már csak 1,7%-ot. Számold ki, hogyan érdemes befektetnem 250 000_Ft-ot: ha élek ezzel a lehetőséggel, vagy ha a szokásos módon 2 évre lekötöm a pénzem évi 3%-os kamatra!

11.

Beraktam a bankba 480 000 Ft-ot. Lekötöttem a pénzt, és 16 hónap után kellett felbontanom a szerződésemet. Így az első évre megkaptam – az egyszeri ... 3% ...

a) Mennyi pénzt vehettem így ki a bankból? ...

b) Mennyi pénzem lehetett volna, ha csak két év után veszem fel a pénzemet? ...

12.

Pista bácsi bt.-je sajnos 3 nap késéssel fizette be a 12 486 Ft-os villanyszámláját, ezért késedelmes fizetés címén kiszámláztak neki még 40 euró (1 euró 309 Ft) behajtási költséget és 23 Ft késedelmi kamatot. Hány százalékkal kellett többet fizetnie, mint ha időben befizette volna a számláját? ...

13.

Vannak, akik aranyba fektetik a megtakarításukat, de az arany értéke is változhat. Ha a gazdasági helyzet ingatag, akkor többen igyekeznek értékállóbb dolgokba menekíteni a pénzüket, ezért az arany iránti kereslet is megnövekszik, s így az ára emelkedik. Amikor a gazdasági helyzet stabilizálódik, az arany ára általában csökken.

a) Nézz utána, mennyibe kerül most 1 g arany, és számold ki, hány grammot tudnál venni 1,5 millió forintból! ...

b) A 1,5 millió forintnyi aranyad ára először 5%-kal, majd 9,5%-kal emelkedett. Meg tudnál-e venni egy használt autót 1 750 000 Ft-ért, ha eladnád minden aranyadat? ...

14.

35 részvényt vásároltam igen kedvező áron: csak 4000 Ft volt darabja. Az első napon 12%-ot, a másodikon 8%-ot, a harmadikon 4%-ot csökkent az árfolyama. A negyedik napon megkaptam az osztalékot, részvényenként 150 Ft-ot.

a) Hány forintért vettem a részvényeket? ...

b) Mennyit értek az első nap végén? ...

c) Mennyi pénzt értek a részvények a harmadik nap végén? ...

d) Hány forint osztalékot kaptam? ...

e) Mennyi nyereségem, illetve veszteségem lett a negyedik nap végén? ...

15.

Vettem 63 részvényt, darabját 12,50 euróért. A részvény árfolyama az első nap 9%-ot, a második nap 2%-ot emelkedett. Megkaptam a részvényekért járó osztalékot is, darabonként 0,5 eurót.

a) Hány euró a nyereségem? ...

b) Nézz utána, hány forintot ér most 1 euró, és számold ki a nyereséget forintban is! ...

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

Kombinatorika

Bevezető tananyag és feladatok

Jelszó – Hányféleképpen lehetséges?

*Vica az e-mail levelezőrendszerbe való belépésnél a **dalibor** jelszót használta, mert a legjobb barátját Dalibornak hívták. Egy filmben látta, hogy ha valaki hozzá akarna férni az elektronikus postájához, akkor könnyen kitalálhatná ezt a jelszót. Ugyanis mindenki tudott Daliborral való barátságáról. Eldöntötte, hogy úgy változtatja meg a jelszót, hogy abban két betűt felcserél.*

1 Hányféleképpen változtathatja meg a jelszót?

Figyeljétek meg, hogyan oldotta meg Dávid, Hanka és Gyuri az előző feladatot! Dávid az alábbi felsorolást alkalmazta:

da
dl al
di ai li
db ab lb ib
do ao lo io bo
dr ar lr ir br or

2 Mondjátok meg:
a) mit jelentenek az egyes betűpárok Dávid feljegyzésében,
b) milyen rendszert választott Dávid a felsorolásnál!

3 Alkalmazzátok Dávid rendszerét az alábbi jelszók esetében:
a) **rozsika**, b) **darius**, c) **bertolda**!

Gyuri négyzethálós papírt használt:

4 Mondjátok meg:
a) mit jelentenek az egyes sorok, oszlopok és vonalak Gyuri feljegyzésében,
b) milyen rendszert választott Gyuri a felsorolásnál!

5 Oldjátok meg Gyuri módszerével az alábbi jelszók esetében:
a) **bonifac**, b) **zombor**, c) **bertolda**!

Hanka így oldotta meg Vica feladatát:

d	a	l	i	b	o	r
1	2	3	4	5	6	7

76, 75, 74, 73, 72, 71 → *6 lehetőség*
65, 64, 63, 62, 61 → + *5 lehetőség*
54, 53, 52, 51 → + *4 lehetőség*
43, 42, 41 → + *3 lehetőség*
32, 31 → + *2 lehetőség*
21 → + *1 lehetőség*
= *21 lehetőség*

7 Alkalmazzátok Hanka módszerét a következő jelszók esetében: a) **rajmund**, b) **fausztino**!

A következő feladatokat oldjátok meg a számotokra legmegfelelőbb módszerrel!

8 Vica most úgy szeretné megváltoztatni a **jozsika** jelszót, hogy két betű helyére a 4-es számjegyet írja, például **j4zsik4**. Hányféleképpen teheti ezt meg? Írjátok ki a lehetőségeket!

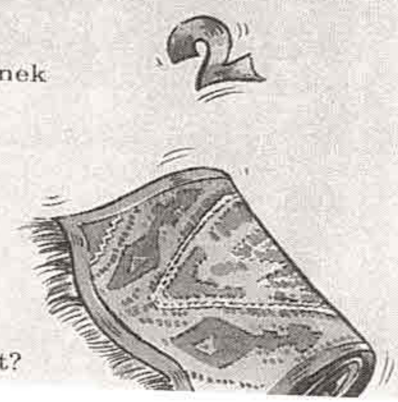
9 Oldjátok meg a feladatot úgy, hogy most a jelszó két betűjét nagybetűvel helyettesítitek, például a **fabricio** jelszó a **faBriCio**-ra változik.

10 Oldjátok meg a feladatot úgy, hogy most a jelszó hét betűjét nagybetűvel helyettesítetek, például a **boldizsar** jelszó a **BoLDIZSaR**-ra változik.

11 Nyolc gyermek közül kiválasztunk kettőt, akik elmennek az üzletbe. Hányféleképpen lehetséges ez?

12 Hány meccset játszik 9 csapat, ha mindenki mindenkivel egy meccset játszik?

13 Nyolc lány a hetedik osztályból röplabdameccset játszik a nyolcadikos lányokkal. A meccs folyamán minden csapatból hat lány van a pályán. Hányféleképpen választhatja ki az edző a kezdő hatost?



Amikor több feltétel adott

Gyakran előfordul, hogy az összes rendelkezésre álló lehetőség közül nem mind használható, nem mind lehetséges, vagy kivitelezhető. Például a futball ligában nem minden csapat áll rendelkezésre bármelyik pillanatban, vagy nem minden gyermek tud elmenni a boltba (némelyik kicsi és nem bírja el a táskákat).

1 Nyolc gyermekből kell kiválasztanunk kettőt, akik elmennek a boltba ásványvízért. Azt tudjuk, hogy Petra csakis Olivérrel megy el, Károly viszont nem hajlandó Máriával menni. Hányféleképpen választható ki az a pár, akik elmennek együtt a boltba?

Figyeljétek meg, hogyan oldotta meg a feladatot Tamás, Hanka és Róbert!

A többi négy gyermeket jelölöm A-val, B-vel, C-vel, illetve D-vel.

Figyeljük Tamás jegyzeteit:

Előbb azokat figyelem, akikre feltételeket szabtak, azaz Petrát és Károlyt.

Petra, Károly, Olivér, Mária, A, B, C, D
Petra: PO
Károly: KA, KB, KC, KD, KO

A többi hat gyermekre nincs feltétel.

AB, AC, AD, AM, AO, BC,
BD, BM, BO, CD, CM, CO,
DM, DO, MO

Összesen 21 lehetőség van

2 Magyarázzátok

Róbert az 1. feladat megoldásánál négyzetrácsos papírt használt:

P	/																				
O	/	/	/	/	/	/	/														
M		/						/	/	/	/										
K			/									/	/	/	/						
1				/				/				/				/	/	/			
2					/				/				/			/			/	/	
3						/				/				/			/		/		/
4							/				/				/			/		/	/

4 Magyarázzátok el Róbert gondolatmenetét!

5 Nyolc gyermek közül, melyek között öt lány van, kettőt választunk ki, akik részt vesznek egy versenyen. A kiválasztott párban legfeljebb egy lány lehet. Használjátok Róbert gondolatmenetét és határozzátok meg, hányféleképpen választható ki a páros!

Térjünk vissza az 1. feladathoz. Hankának a megoldásnál segített a számozás.

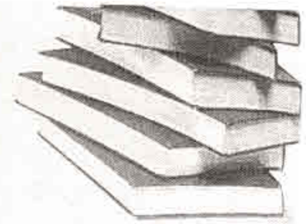
Petra 1
Olivér 2
Mária 3
Károly 4
5
6
7
8

87, 86, 85, 84, 83, 82, ~~81~~,
76, 75, 74, 73, 72, ~~71~~, 65, 64,
63, 62, ~~61~~, 54, 53, 52, ~~51~~, ~~43~~,
42, ~~41~~, 32, ~~31~~, 21

6 Magyarázzátok el Hanka gondolatmenetét!

7 Nyolc gyermek között 5 lány van. A gyerekek közül kettőt választunk ki, akik képviselik az osztályt a diákparlamentben. Azt tudjuk, hogy Petra és Mária csakis egy fiúval párban vállalják a képviseletet. Használjátok Hanka gondolatmenetét és határozzátok meg, hányféleképpen választható ki a páros!

8 Kilenc gyermek közül, melyek között ott van Petra, Olivér, András, Mária, Károly és György, kettőt választunk ki, akik a könyvtárból elhozzák az új könyveket. Azt tudjuk, hogy Petra csakis Olivérrel vagy Andrással megy el, Máriával viszont sem Károly, sem György nem akar elmenni. Hányféle lehetőségünk van?



9 Konrád email jelszava **petruska** volt, mert Petra a barátnője. Idővel rájött, hogy sok ember tudja, hogy Petrát Petruskának szólítja. Ha valaki nagyon akarná, bizony meg tudná fejteni a jelszavát. Ezért úgy döntött, megváltoztatja a jelszót: a régi jelszóban felcserél két nem szomszédos betűt. Hányféle lehetősége van?

10 Nyolc lány a 7. osztályból röplabdázni készül a nyolcadikos lányok ellen. A pályán egyszerre csak hat lány lehet egy-egy csapatból. Hányféleképpen állíthatja fel az edző a hetedikes lányok kezdő csapatát, ha Tímea és Éva nem léphetnek együtt pályára?

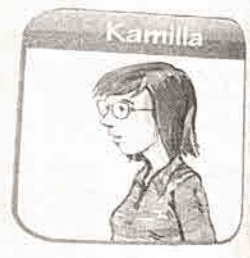
Asztalitenisz bajnokság

A hosszú távú asztalitenisz bajnokság során mindenki mindenkivel pontosan egy meccset játszik. A bajnokságra eddig 18 lány nevezett be. Ha felsorolással próbálnánk meghatározni, hány meccs lesz összesen, akkor ez igazán nagy munka volna. Ugyanis 153 meccs lesz összesen.

1 A bajnokságra még egy lány jelentkezett. Hány meccset játszanak le összesen a bajnokság során, ha 19 résztvevő van?

Figyeljétek meg, hogyan oldotta meg a feladatot Kamilla!

Kamilla:
Elég meghatározni, hány meccset játszik az újonnan jelentkező lány. Összesen 18 meccset játszik, a korábban benevezett 18 lány mindegyikével egyet.
$153 + 18 = 171$
A bajnokságon összesen 171 meccset játszanak.



2 Következő nap még két lánytestvér jelentkezett a bajnokságra. Hány meccsel lesz így több?

3 Kamilla füzetében az előző feladattal kapcsolatban a következő feljegyzés van: $171 + 19 + 20 = 210$. Eláruljuk, hogy Kamilla számolása jó. Magyarázzátok meg Kamilla megoldását!

4 Végül 24 lány nevezett a bajnokságra. Hány meccsre kerül sor összesen a bajnokság során?

5 Fiúk számára is rendeztek hasonló bajnokságot. Összesen a) 17, b) 16, c) 15 fiú nevezett be. Hány meccset játszanak le összesen?

Ki megy ásványvízért?

Az osztályban 12 fiú és 16 lány van. Közülük kettőt kell kiválasztani, akik ásványvizet hoznak az iskolai büfébből. Az ásványvíz nehéz, ezért vagy két fiú, vagy egy fiú és egy lány (de két lány semmiképp sem) megy a büfébe. Ha a lehetséges párok számát felsorolással próbálnátok meghatározni, akkor ez sok időt és energiát venne igénybe, mert összesen 258 lehetőség van.

1 A 12 fiúból egy hiányzik, a lányok mind jelen vannak. Hány lehetőség van ebben az esetben a páros kiválasztására?

Figyeljétek meg, hogyan oldotta meg a feladatot Milán!

Milán:
Elegendő meghatározni, hány párosban szerepelne az a fiú, aki most hiányzik. Ez pedig 27 páros, hiszen ennyi osztálytársa van.
$258 - 27 = 231$
Így tehát 231 lehetőség van.

2 Jó Milán megoldása?

3 A fiún kívül most egy lány is hiányzik. Hány lehetőség van ebben az esetben?

4 Ha belenéznénk Milán füzetébe, akkor ezt a számolást találnánk benne: $231 - 11 = 220$. Miért vont ki Milán 11-et, ha összesen 26 jelenlévő van az osztályban?

5 Hány lehetőség van a páros kiválasztására, ha a 12 fiúból és 16 lányból most 3 fiú hiányzik?

6 Hány lehetőség lenne a páros kiválasztására akkor, ha a 12 fiúból és 16 lányból két lány hiányozna? Viktória ezt jegyezte fel: $258 - 12 - 11 = 235$. Jó a megoldása?

7 Hány páros mehetne az ásványvízért, ha az eredeti 12 fiúból és 16 lányból 3 lány hiányozna?

8 Hány páros mehetne az ásványvízért, ha az eredeti 12 fiúból és 16 lányból 2 fiú és 1 lány hiányozna?

9 Hány páros mehetne az ásványvízért, ha az eredeti 12 fiúból és 16 lányból 2 fiú és 2 lány hiányozna?

10 Nézzünk bele Kamilla és Milán füzetébe, hogyan oldották meg az előző feladatot!
Kamilla: $258 - 12 - 12 - 25 - 24 = 185$
Milán: $258 - 27 - 26 - 10 - 10 = 185$
Mindkét módszer jó. Magyarázzátok meg a megoldásukat!

7 Egy ünnepségen 10 személy vett részt. Mindenki mindenkivel egyszer koccintott. Hány koccintás volt összesen?

8 Hány oldala és átlója van összesen egy szabályos tízszögnek?

9 Hol követett el hibát Tamás a 8. feladat megoldásában?

Tamás:
Rajzolás helyett inkább számolok.
Minden csúcsból 9 szakasz indul ki – 2 oldal és 7 átló.
Mivel 10 csúcs van, az oldalak és átlók száma
összesen: $10 \cdot 9 = 90$.

10 Hányféleképpen választható ki 5 diák közül egy elnök és egy alelnök?

11 Hol követett el hibát Aranka a 10. feladat megoldásában?

Aranka:
A gyerekeket A, B, C, D, E betűkkel jelöltem, majd
szépen felsoroltam a lehetőségeket:
AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE.
Tehát összesen 10 lehetőség van.

Gyakoroljátok mindazt, amit eddig kombinatorikából megtanultatok!

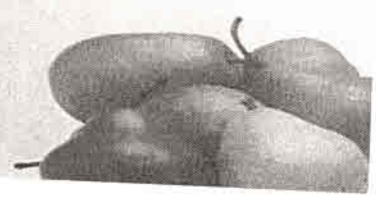
12 Hány háromjegyű szám van? Hány olyan természetes szám van, melynek lejegyzésében legfeljebb három számjegy van?

13 Milán eldöntötte, hogy az 5 számjegyből álló jelszavához csak a 4-es vagy a 8-as számjegyet fogja felhasználni. Hányféle jelszava lehet?

14 Hányféleképpen lehet szétosztani a) 20, b) 24, c) 33 egyforma almát Jancsi és Juliska között?

15 Hányféleképpen lehet szétosztani 2 egyforma almát és a) 3, b) 4, c) 5 egyforma körtét Jancsi és Juliska között?

16 Hányféleképpen lehet szétosztani 4 egyforma körtét Jancsi, Juliska és a gonosz boszorkány között?



Feladatok gyakorlásra

1. Négy fiú elhatározta, hogy elmennek moziba. Hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé?

2. Az 1, 2, 3 számokból hány 3 jegyű szám készíthető, amelynek jegyei különbözőek?

3. Hányféle lehet annak a futóversenynek a befutási sorrendje, amelynek résztvevői Szellőlábú Szilárd, Gyors Ottó, Poroszka Pista és Fürge Ubul?

4. Hányféleképpen választhatjuk ki az osztálytitkárt és a helyettesét a) 6, b) 7 jelöltből?

5. Hányféleképpen ülhet fel egy hat székes körhintára 6 gyermek?

6. A 4, 4, 5, 5, 6 számjegyekből hány 45-tel kezdődő 5 jegyű szám készíthető?

7. A fagyisnál csoki, citrom, vanília és eper fagyi kapható. Hányféleképpen tehetünk egy tölcsérbe sorban egymás után 2 különböző gombócot? Hármat? És négyet?

8. Hatféle színű ceruzánk van. Egy dobókocka lapjain a pöttyöket szeretnénk velük kiszínezni. Ha egy lapon belül több pötty van, azok ugyanolyan színűek. Hányféle lehet a színezés, ha
a) mind a hat színt felhasználjuk?
b) nem feltétlenül használjuk mindegyik színt?

9. Három színes selyemcsík összevarrásával zászlót készítünk. Ezek mind ugyanolyan alakúak. Hányféle lehet a zászlónk, ha 3 fajta színünk van és
a) mindegyikből egyet-egyet használunk?
b) mindegyikből tetszőleges számút használhatunk úgy, hogy a szomszédos csíkok különböző színűek legyenek?

10.Hányféleképpen lehet szétosztani a) 24, b) 33 egyforma körtét Jancsi és Juliska között?

11. Hányféle 4 betűs ,,szó" készíthető a következő szavak betűiből:
a) DIÁK; **b)** ÖRÖM; v**c)** SÜSÜ?
(A négybetűs karaktersor nem kell, hogy valóban értelmes szó legyen.)

12. Az A,B,C pontok az egyik, az E,F,G pontok a másik egyenesen fekszenek. Írjuk fel az összes egyenest, melyet ez a hat pont meghatároz.

13. 7 betűkártyánk van. Haton az A, A, A, B, B, C betűk szerepelnek. Milyen betű lehet a hetedik kártyán, ha a 7 betűkártyával összesen 140 hétbetűs ,,szó" rakható ki?

14. Három dobókockával játszunk. Ha egy dobás után a kockákon látható számok szorzata 6, akkor az első játékos nyer, ha az összegük 6, akkor a második. Melyik játékosnak van nagyobb esélye a győzelemre?

15. Egy klubdélutánon 6 fiú és 6 lány van. Hányféleképpen alkothatnak párokat a táncoláshoz?

16. Hányféle betűsorozat készíthető az EKEKE szó betűiből? Adj meg olyan szót, amelynek betűiből 20 különböző betűsorozat készíthető.

17. Hányféleképpen ülhet le egy padra egymás mellé Ádám, Bea, Cili, Csongor és Richárd, ha fiúk nem ülhetnek egymás mellé?

18. Az ötéves találkozón az összes résztvevő koccintott mindenkivel. Ez összesen 253 koccintást jelentett. Hányan voltak a találkozón?

19. A jégkorong mérkőzés eredménye 8:6 lett. Az egyes harmadok eredményei 2:2, 2:3, 4:1. Hányféleképpen alakulhatott a mérkőzés állása?

20. Hány 5000-nél kisebb természetes szám alakítható ki a 0,3,4,5 számjegyek segítségével, ha számjegyek nem ismétlődhetnek? Ismétlődhetnek?

21. 5 ember hányféleképpen ülhet be egy 5 személyes autóba?

22. Hányféleképpen írhatjuk egy hatszög csúcsaihoz az 1, 2, 2, 3, 3, 3 számokat, ha
a) a hatszög oldalai közt nincs két egyforma?
b) a hatszög szabályos és az egymásba forgatható elrendezéseket nem különböztetjük meg?

23.
Hány olyan különböző jegyekből álló nyolcjegyű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 jegyekből, amelyben nincs egymás mellett két páros jegy?

24. Hány olyan különböző jegyekből álló négyjegyű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0 jegyekből, amely osztható
a) 3-mal? **b)** 5-tel? **c)** 4-gyel?

25. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket egyszer felhasználva felírjuk az összes ötjegyű számot.
a) Növekvő sorrendbe állítva őket melyik szám lesz a százegyedik?
b) Hányadik helyen áll a 42531?
c) Határozzuk meg ezeknek a számoknak az összegét!

26. Hányféleképpen oszthatunk el 9 munkást, 3 munkaállomásra, ha az elsőn 4 munkás, a másodikon 3 a harmadikon 2 munkás dolgozik?

27. Hány 5 hosszú morse jelsorozat készíthető? Pl. tá-tá-ti-ti-tá.

28. Hány darab háromjegyű szám van? Hány darab háromjegyű szám van, amelynek minden jegye különböző?

29. Hány darab négyjegyű szám van, aminek minden jegye páratlan?

30. Egy futóversenyen 15-en vettek részt. Hányféleképpen oszthatták ki az arany-, ezüst- és bronzérmet?

Valószínűségszámítás

1. feladat

Automatikus hangoláskor a tv-készülék 25 csatornát talált, ezekből négy volt a zenei csatorna. A csatornákat a tv-készülék véletlenszerű sorrendben menti el. Fejezd ki százalékban annak az eseménynek a valószínűségét, hogy a tv-készülék elsőként zenei csatornát ment el!

2. feladat

A polcon 27 atlasz, 29 szótár, 8 tankönyv és 16 enciklopédia van elhelyezve. Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott könyv a polcról enciklopédia lesz? Az eredményt százalékban fejezd ki!

3. feladat

Az első húsz pozitív egész szám közül választunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy a szám

a) osztható kettővel;
b) osztható hárommal;
c) prímszám;
d) négyzetszám?

4. feladat

Egy kocka lapjait kiszíneztük: két oldalát pirosra, egyet fehérre, hármat pedig zöldre festettünk.

a) Milyen valószínűséggel fogok pirosat, fehéret, illetve zöldet dobni?
b) Ha háromszor dobok egymás után, akkor milyen színhármasok jöhetnek ki? Rajzolj fadiagramot!
c) Milyen valószínűséggel jön ki piros-fehér-zöld a három dobás eredményeként?

5. feladat

Négy színes csomagolású csokigolyó kigurult a zacskóból, amikor az szétszakadt a zsebemben. Két piros volt és két barna. Később benyúltam a zsebembe, és elővettem kettőt, hogy odaadjam Helénnek.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy két piros csokigolyó volt?
b) Mekkora a valószínűsége, hogy két barna csokigolyó volt?
c) Mekkora a valószínűsége, hogy egy piros és egy barna csokigolyó volt?

6. feladat

Három macska sétál sorban a háztetőn, egy fekete, egy cirmos és egy vörös.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy a vörös van középen?
b) Mekkora a valószínűsége, hogy a vörös előrébb van a sorban, mint a fekete?

7. feladat

Négy papírfecnin az 1; 2; 3; 6 számok szerepelnek, ezekből egy négyjegyű számot kell kiraknunk. Egy papírt kihúzunk, a számot leírjuk az ezresek helyére. Kihúzzuk a második, harmadik és végül a negyedik cetlit is, és a rajtuk lévő számot sorban a százasok, a tízesek és az egyesek helyére írjuk. A kihúzott cetliket rögtön kidobtuk.

a) Mekkora valószínűséggel írjuk le a 1236 számot?
b) Mekkora valószínűséggel lesz a leírt szám páros?
c) Mekkora valószínűséggel lesz a leírt szám hárommal osztható?
d) Mekkora valószínűséggel lesz a leírt szám néggyel osztható?
e) Mekkora valószínűséggel lesz a leírt szám öttel osztható?

8. feladat

Számold ki annak a valószínűségét, hogy egy kockával prímszámot dobunk!

9. feladat

Egy piros és egy zöld kockával dobok. A piros kockával dobott szám egy kétjegyű szám első, a zöld kockával dobott szám pedig a kétjegyű szám második számjegye lesz.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy a 11-es számot írom le?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy 20-nál kisebb számot írok le?
c) Mennyi a valószínűsége, hogy négyzetszámot írok le?

10. feladat

Dobjunk fel 4 pénzérmét, és számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy két fej és két írás lesz köztük!

11. feladat

Egy 24 fős osztályban mindenki nevét felírják egy cetlire, összehajtják, és beteszik egy sapkába. Berta húz egyet.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy elsőre pont önmagát húzza?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy Zozó elsőre húz valakit, aztán Berta másodiknak önmagát húzza? (A kihúzott nevet nem teszik vissza.)

12. feladat

Egy nem átlátszó zsákban van 3 piros, 2 kék és 4 sárga biliárdgolyó. Mennyi a valószínűsége a következő eseteknek?

a) Egyből kihúzok egy sárga golyót:
b) Egyből kihúzok egy kék golyót:
c) Egyből kihúzok egy piros golyót:
d) Miután kihúztam egy sárga golyót, kihúzok egy kék golyót:
e) Miután kihúztam egy kék golyót, kihúzok még egy kék golyót:
f) Miután kihúztam egy sárga és egy piros golyót, kihúzok egy kék golyót:

13. feladat

Egy rendezvényen 150 tombolajegyet adtak el. Ági 21-et vásárolt. Mekkora annak a valószínűsége, hogy Ági nyer, ha egy nyereményt sorsolnak ki? (A jegyek nyerési esélye egyenlő.)

14. feladat

Egy öttagú társaság egymás után lép be egy ajtón. Mekkora a valószínűsége, hogy Anna, a társaság egyik tagja, elsőnek lép be az ajtón?

15. feladat

Egy kétforintos érmét kétszer egymás után feldobunk, és feljegyezzük az eredményt. Háromféle esemény következhet be:

A esemény: két fejet dobunk.
B esemény: az egyik dobás fej, a másik írás.
C esemény: két írást dobunk.
Mekkora a B esemény bekövetkezésének valószínűsége?

16. feladat

A 100-nál kisebb és hattal osztható pozitív egész számok közül véletlenszerűen választunk egyet. Mekkora valószínűséggel lesz ez a szám 8-cal osztható?

17. feladat

Egy dobozban húsz golyó van, aminek 45 százaléka kék, a többi piros. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha találomra egy golyót kihúzunk, akkor az piros lesz?

18. feladat

Péter egy 100-nál nem nagyobb pozitív egész számra gondolt. Ezen kívül azt is megmondta Pálnak, hogy a gondolt szám 20-szal osztható. Mekkora valószínűséggel találja ki Pál elsőre a gondolt számot, ha jól tudja a matematikát?

19. feladat

Egy piros és egy sárga szabályos dobókockát egyszerre feldobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege pontosan 4 lesz?

20. feladat

Add meg annak valószínűségét, hogy a 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14 számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztva a kiválasztott szám prím!

21. feladat

Egy dobozban 50 darab golyó van, közülük 10 darab piros színű. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy golyót véletlenszerűen kihúzva pirosat húzunk? (Az egyes golyók húzásának ugyanakkora a valószínűsége.)

22. feladat

Egy kalapban 3 piros, 4 kék és 5 zöld golyó van. Találomra kihúzunk a kalapból egy golyót. Add meg annak valószínűségét, hogy a kihúzott golyó nem piros!

23. feladat

Az első 100 pozitív egész szám közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Add meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott szám osztható 5-tel!

Statisztika

Tartalom

A statisztikai sokaság leírása – adatrendezés
statisztikai jellemzők:

- átlag,
- módusz,
- medián,
- terjedelem

feladatok a statisztikai jellemzők meghatározására

Diagramok:

- oszlopdiagram,
- kördiagram,
- sávdiagram,
- vonaldiagram,
- egyéb: gyűrű, terület

feladatok diagramok elkészítésére

Szóródásra vonatkozó adatok

- az adatok átlagtól való távolsága
- az adatok átlagtól való távolságának átlaga
- átlagos abszolút eltérés
- szórásnégyzet
- szórás feladatok megoldása
- számológép alapfunkcióival
- számológép statisztikai függvényeivel
- számítógépes programmal (táblázatkezelő, pl. Excel)
- számítógépes programmal (táblázatkezelő függvényei)

Osztályba sorolás

Ismérvek közötti statisztikai összefüggés

- korellációs együttható

A statisztikai sokaság leírása – adatrendezés

statisztikai jellemzők:

- *átlag,*
- *módusz,*
- *medián,*
- *terjedelem*
- *abszolút gyakoriság*
- *relatív gyakoriság*

Feladatok a statisztikai jellemzők meghatározására

1. Megadunk egy számsokaságot: 32, 18, 20, 18, 20, 24, 15, 18, 55, 10.
   a) Mennyi az átlaga, a módusza, a mediánja?
   b) Adj meg öt számot úgy, hogy ennek a számsokaságnak ugyanaz legyen a módusza és a mediánja, mint az adott számsokaságé, de az átlaga kétszer akkora legyen!
   c) Adj meg öt számot úgy, hogy ennek a számsokaságnak ugyanaz legyen az átlaga és a mediánja, mint az adott számsokaságé, de a módusza 3-mal kisebb legyen.

2. Egy osztály matematika dolgozatot írt. Az érdemjegyeket mutatja a táblázat.

osztályzat	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
gyakoriság	4	6	9	4	2

   a) Add meg az osztályzatokat tartalmazó adathalmaz terjedelmét, móduszát, mediánját és átlagát!
   b) Add meg az egyes érdemjegyek relatív gyakoriságát!
   c) Ábrázold a b) feladatban kapott relatív gyakoriságokat oszlopdiagramon!

3. Egy város középiskolájában 4 évfolyamos gimnáziumi és 3 évfolyamos szakmunkásképzős osztályok vannak. A gimnáziumi osztályok betűjele: A, B, C és D, a szakiskolai osztályoké E, F és G. Az osztálylétszámokat a táblázat mutatja:

	A	B	C	D	E	F	G
1. évfolyam	31	28	31	29	26	28	29
2. évfolyam	31	27	28	24	27	24	20
3. évfolyam	28	30	26	28	18	20	12
4. évfolyam	24	29	25	22	-	-	-

   a) Mennyi az átlagos létszám az egyes évfolyamokon?
   b) Jelöld K-val a 16 gimnáziumi osztály átlagos létszámát, L-lel pedig a 9 szakmunkásképzős osztály átlagos létszámát! Számítsd ki, mennyi a K, és mennyi az L!
   c) Mit ad meg a $\frac{16K+9L}{25}$ szám?

4. Osztályotok valamennyi fiújának állapítsátok meg a magasságát cm-ben és a tömegét kg-ban. Adjátok meg az adott ismérvek terjedelmét, átlagát, móduszát és mediánját!

5. Egy osztályban 25-en írtak történelemdolgozatot. A dolgozatokat a tanár az 1, 2, 3, 4, 5 érdemjegyek valamelyikével minősítette. Az osztályzatok átlaga 3,16 lett.
   a) Számítsd ki, hogy mennyi a dolgozatokra írt érdemjegyek összege a 25 dolgozat esetében!
   b) Adj meg egy lehetséges jegyeloszlást, amelyben 3 az érdemjegyek módusza!
   c) Adj meg egy olyan lehetséges jegyeloszlást, amely-ben 2 az érdemjegyek mediánja!
   d) Elképzelhető-e olyan jegyeloszlás, amelyben az érdemjegyek módusza az 5? Ha igen, adj meg egy lehetőséget! Ha nem, válaszodat indokold!
   e) Elképzelhető-e, hogy csak 3-as és 4-es osztályzatok születtek? Ha igen, adj meg egy lehetőséget! Ha nem, válaszodat indokold!

6. Bence beteg volt, de a háziorvosa szerint hétfőn már mehet iskolába. Bence vasárnap ötször is megmérte a lázát. A mérések átlaga 36,8 °C lett.
   a) Elképzelhető-e, hogy egész nap láztalan volt Bence, azaz mind az ötször 37,5 °C-nál kevesebbet mért? Ha igen, adj meg egy lehetőséget! Ha nem, válaszodat

b) Elképzelhető-e, hogy Bencének kétszer is 37,8 °C volt a láza? Ha igen, adj meg egy lehetőséget! Ha nem, válaszodat indokold!
c) Elképzelhető-e, hogy a mért hőmérsékletek módusza 37 °C volt? Ha igen, adj meg egy lehetőséget! Ha nem, válaszodat indokold!
d) Elképzelhető-e, hogy a mért hőmérsékletek mediánja 36,6 °C volt? Ha igen, adj meg egy lehetőséget! Ha nem, válaszodat indokold!

További feladatok:

Zbynek Kubáček: Matematika a gimnázium 3. osztálya és a nyolcosztályos gimnázium 7. osztálya számára, 1. rész, SPN, Bratislava 1. kiadás, 50-56. oldal, 32-47. feladatok

Diagramok:

- *oszlopdiagram,*
- *kördiagram,*
- *sávdiagram,*
- *vonaldiagram,*
- *egyéb: gyűrű, terület*

Feladatok diagramok elkészítésére

1. Az 1. évfolyam végén 4 diák 1-est, 8 diák 2-est, 6 diák 3-ast kapott. A 2. évfolyam végén ugyanazokból 5 diák 1-est, 9 diák 2-est, 4 diák 3-ast kapott matematikából. Alakítsd ki az 1. és 2. évfolyamhoz tartozó oszlopdiagramokat!

2. A táblázatban egy osztály egyik matematikadolgozatának eredményei láthatók, osztályzatok szerinti összesítésben

érdemjegy	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
érdemjegyek száma	4	3	6	5	2

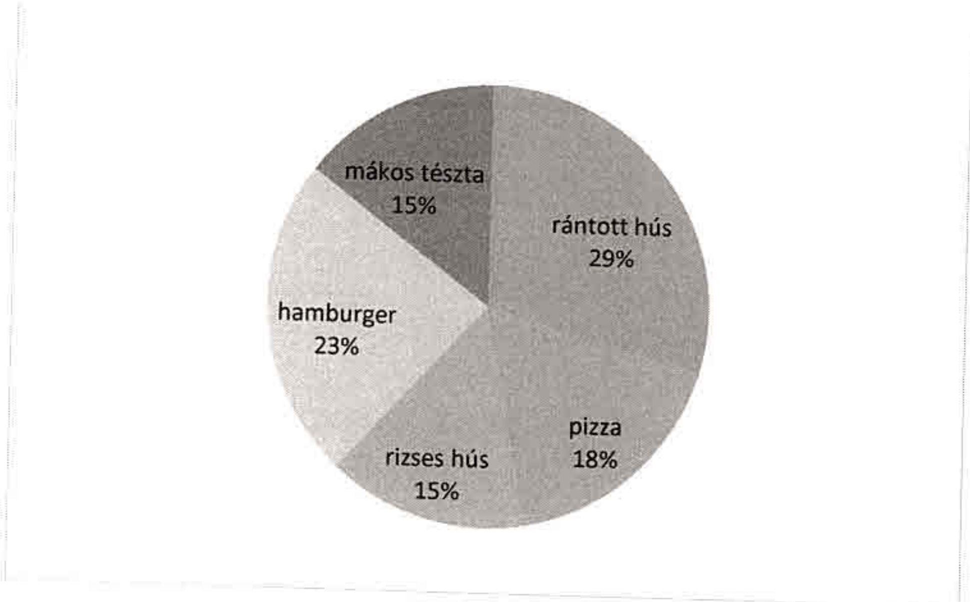
a) ábrázoljátok oszlopdiagram segítségével a táblázatba foglalt adatokat!
b) Határozzátok meg az egyes jegyek relatív gyakoriságát!
c) Ábrázoljátok kördiagramon az érdemjegyek relatív gyakoriságát!
d) Adjátok meg az osztályzatokból álló adatsokaság terjedelmét, móduszát, mediánját és átlagát

3. Egy 8 évfolyamos gimnázium 300 tanulójának évfolyamonkénti megoszlását kördiagramon ábrázolták. Az egyes évfolyamokhoz tartozó körcikkek középponti szögét a táblázat mutatja:

évfolyam	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
középponti szög	36°	50,4°	43,3°	40,8°	54°	45,6°	54°	36°

a) Rajzold meg vázlatosan az évfolyamonkénti megoszlást bemutató kördiagramot.
b) Melyik évfolyamon hány diák tanul?
c) Mely számok alkotják az adathalmazt, és mennyi a különböző adatok relatív gyakorisága? Add meg a móduszt, a mediánt és az átlagot! Melyik statisztikai jellemzőnek nincs „gyakorlati haszna” jelen esetben?
d) Készíts az adatok alapján oszlopdiagramot!

4. Egy felmérés során 40 diákot kérdeztek meg arról, hogy a felsoroltak közül melyik a kedvenc ételük. A felmérés eredményét a kördiagram szemlélteti.



a) Melyik étel hány diáknak a kedvence?

5. feladat

Szóródásra vonatkozó adatok

- *az adatok átlagtól való távolsága*
- *az adatok átlagtól való távolságának átlaga*
- *átlagos abszolút eltérés*
- *szórásnégyzet*
- *szórás*
- *+ Csebisev-egyenlőtlenség feladatok megoldása*
- *számológép alapfunkcióival*
- *számológép statisztikai függvényeivel*
- *számítógépes programmal (táblázatkezelő, pl. Excel)*
- *számítógépes programmal (táblázatkezelő függvényeivel)*

1. Kubáček, Matematika 3. 66. oldal 7. feladat
2. Az egyik egyetemi tanulmányi csoportban a hallgatók életkorának meghatározásánál a következő értékeket kapták:
   18, 19, 18, 18, 19, 18, 20, 21, 20, 21, 22, 22, 18, 18, 18, 19, 19, 18, 19, 20
   a) Határozzátok meg az adathalmaz (statisztikai sokaság) terjedelmét.
   b) Vegyétek fel táblázatba az értékeket az abszolút gyakoriság feltüntetésével.
   c) Határozzátok meg a modust, mediánt és a 18-as érték relatív gyakoriságát.
   d) Számoljátok ki a szórásnégyzetet.

3. A következő táblázat a nemesítő intézetben termett véletlenül kiválasztott almák tömegét tünteti fel:

Tömeg (g)	28	33	38	43	48
Almák száma	9	15	14	8	4

   Számítsd ki az almák tömegének:
   a) átlagát,
   b) móduszát,
   c) mediánját,
   d) szórását.

4. A következő táblázat a főiskolai végzettségű dolgozók számát tünteti fel életkor szerint:

Életkor	22,5	27,5	32,5	37,5
Dolgozók száma	122	560	610	615

   Számítsd ki a főiskolai végzettségű dolgozók életkorának:
   a) számtani közepét,
   b) móduszát,
   c) mediánját,
   d) szórását.

5. feladat Kubáček, Matematika 3. 74. oldal 17. feladatának adatait felhasználva számold ki a minta átlagát, szórásnégyzetét, szórását, majd ellenőrizd az adatok eloszlását a Csebisev-egyenlőtlenség segítségével.

Osztályba sorolás

Ismérvek közötti statisztikai összefüggés

- *korellációs együttható*

Feladatok:

1. Egy strandbüfében úgy találták, hogy összefüggés van az üdítőital fogyasztás mennyisége és az átlagos napi hőmérséklet között. Ezért 20 véletlenszerűen kiválasztott napon megvizsgálták az üdítőital fogyasztás mennyiségét és a következő adatokat kapták:

Nap	**Üdítőital fogyasztás mennyisége (l)**	**Napi maximális hőmérséklet (°C)**
1.	520	25
2.	534	26
3.	610	28
4.	780	32
5.	708	27
6.	639	25
7.	486	23
8.	423	20
9.	452	22
10.	597	29
11.	640	30
12.	657	31
13.	678	30
14.	620	27
15.	635	28
16.	610	26
17.	585	25
18.	627	27
19.	608	26
20.	720	30

Jellemezd a napi maximális hőmérséklet és az üdítőital fogyasztás közötti kapcsolatot a korrelációs együttható alapján.

2. A táblázat tíz azonos korú diák matematikai és zenei képesség szerinti rangsorolása. Milyen szoros kapcsolatra enged következtetni a matematikai és zenei képesség között?

Diákok	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**
Matematikai képesség szerinti rangsor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zenei képesség szerinti rangsor	3	4	1	2	5	7	10	6	8	9

Feladatok bizonyításokra

Nevezetes közepek

Aritmetikai (Számtani) közép: Két nemnegatív szám számtani közepének a két szám összegének a felét nevezzük.
A számtani közepet szokás aritmetikai középnek is nevezni, és "A" betűvel jelölni.

$$A(a;b)=\frac{a+b}{2}$$, ahol ***a***; ***b*** >0

$$A(a_1;a_2;\ldots a_n)=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

Definíció:

Geometriai közép: Két nemnegatív szám mértani közepének a két szám szorzatának négyzetgyökét nevezzük.

A mértani közepet szokás geometria középnek is nevezni, és "G" betűvel jelölni.

Formulával: $G(a,b)=\sqrt{ab}$, ahol ***a***;***b*** >0

$$G(a_1;a_2;\ldots a_n)=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

Definíció:

Négyzetes közép: *Két nemnegatív szám négyzetes közepének nevezzük azt a számot, amelyet a két szám négyzetének számtani közepéből négyzetgyökvonással kapunk.*

A négyzetes közepet szokás "N" betűvel jelölni. **formulával:**

$$N(a,b)=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

ahol ***a***; ***b*** valós számok

Feladatok:

1. Bizonyítsd be minden a, b nemnegatív számra érvényes:

$$G \leq A$$

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Megoldás:

Rendezzük az egyenlőtlenséget!

$$2\sqrt{ab} \leq a+b$$

Mivel mindkét oldal nemnegatív, ezért négyzetre emelhetünk.

$$4ab \leq (a+b)^2$$

Végezzük el a négyzetre emelést!

$$4ab \leq a^2 + 2ab + b^2$$

Redukáljuk az egyenlőtlenséget nullára!

$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2$$

$$0 \leq (a-b)^2$$

Két szám különbségének négyzete nemnegativ szám. Mivel ez igaz, ezért a rendezés előtti egyenlőtlenség is igaz.

Egyenlőség akkor áll fen, ha $a = b$.

2. Bizonyítsd be minden a, b nemnegatív számra érvényes:

$$A \leq N$$

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Megoldás:

Mivel mindkét oldal nemnegatív, ezért négyzetre emelhetünk.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

Redukáljuk nullára az egyenlőtlenséget!

$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2$$

$$0 \leq (a-b)^2$$

Igaz állításhoz jutottunk.

3. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges x, y valós számra érvényes

$$(x-1)(y+1) < x^2 + y^2 \; !$$

Megoldás:

Rendezzünk az egyenlőtlenséget $x^2 + y^2 - xy - x + y + 1 > 0 \;/ .2$

$$2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x + 2y + 2 > 0$$

Vegyük észre: $x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 > 0$

Teljes négyzetre alakítva, kapjuk:

$$(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y+1)^2 > 0$$

Mivel a baloldalon lévő kifejezések pozitívak, ezzel igazoltuk az egyenlőtlenséget.

4. Legyen a, b, c egy tetszőleges háromszög oldalainak hossza, a háromszög fél kerülete legyen s. Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c} \geq 6 \; !$$

Megoldás:

Legyen $\begin{cases} x = s - a \\ y = s - b \\ z = s - c \end{cases}$ ahol, x, y, z pozitív számok mert $x = s - a = \dfrac{a+b+c}{2} - a = \dfrac{b+c-a}{2} > 0$,

a háromszög egyenlőtlenség miatt $b + c > a$, hasonlóképpen az y, z re.

Vegyük észre, hogy $x + y + z = s + s + s - (a + b + c) = 3s - 2s = s$

Kifejezve az $\begin{aligned} a &= s - x = x + y + z - x = y + z \\ b &= s - y = x + y + z - y = x + z \\ c &= s - z = x + y + z - z = x + y \end{aligned}$

Átírva az egyenlőtlenségünket:

$$\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 6$$

Szétírva parciális törtekre:

$$\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \geq 6$$

$$\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) \geq 6$$

Ez viszont teljesül, ha alkalmazzuk a pozitív szám és reciprokának összegére vonatkozó egyenlőtlenséget: $a + \dfrac{1}{a} \geq 2, a > 0$

Tehát $\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} \geq 2$

5. Bizonyítsuk be, hogy az a, b, c különböző pozitív számok és az $a + b + c = 1$ akkor $(1-c)(1-b)(1-c) \geq 8abc$!

Megoldás:

A feltételből kiindúlva

$$1 - a = b + c, \; 1 - b = a + c, \; 1 - c = a + b$$

Ezt felhasználva a következő egyenlőtlenséget kell igazolnunk, hogy

$$(b+c).(a+c).(a+b) \geq 8abc$$

Célszerű átalakításokat végezve és felhasználva a számtani és mértani közepek közti összefüggést, kapjuk:

$$\frac{(b+c)}{2}\frac{(a+c)}{2}\frac{(a+b)}{2} \geq abc$$

Mivel $\frac{(b+c)}{2} \geq \sqrt{bc}$ $\frac{(a+c)}{2} \geq \sqrt{ac}$ $\frac{(a+b)}{2} \geq \sqrt{ab}$

$$\frac{(b+c)}{2}\frac{(a+c)}{2}\frac{(a+b)}{2} \geq \sqrt{bc}.\sqrt{ac}.\sqrt{ab}$$

$$\frac{(b+c)}{2}\frac{(a+c)}{2}\frac{(a+b)}{2} \geq \sqrt{a^2b^2c^2} = abc$$

Mivel ez igaz, megkaptuk azt, amit bizonyítani akartunk.

6. Legyenek a, b olyan valós számok, amelyekre az $a > b$ és $ab = 1$. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{a^2+b^2}{a-b} \geq 2\sqrt{2}$!

Megoldás:

Hajtsunk végre célszerű átlapításokat és használjuk fel a $ab = 1$ feltételt.

$$\frac{a^2+b^2}{a-b} = \frac{(a-b)^2+2ab}{a-b} = \frac{(a-b)^2+2}{a-b} = \frac{a-b}{1} + \frac{2}{a-b}$$

Mivel a $a >$ b ezért a – b> 0 és $\frac{2}{a-b} > 0$.

Alkalmazva a számtani és mértani közepek közti összefüggést.

$$\frac{a-b+\frac{2}{a-b}}{2} \geq \sqrt{(a-b)\frac{2}{a-b}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{a-b+\frac{2}{a-b}}{2} \geq \sqrt{2}$$

$$a-b+\frac{2}{a-b} > 2\sqrt{2}$$

Adódik, amit bizonyítani akartunk.

7. Egy derékszögű háromszög befogói a, b és átfogója c. Bizonyítsuk be, hogy $a+b \leq c\sqrt{2}$!

Megoldás:
Az adott egyenlőtlenség ekvivalens a következő egyenlőtlenséggel.

$$\frac{a+b}{2} \le c\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Két nemnegatív szám számtani és négyzetes közepeire érvényes: $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

Mivel derékszögű háromszögre érvényes, hogy $a^2+b^2=c^2$. Ezért ezt felhasználva kapjuk:

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} = c\frac{\sqrt{2}}{2}$$ Ezt akartuk bizonyítani.

Az " = " akkor áll fenn, ha $a=b$.

8. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a és b valós számokra teljesül az $a^4+b^4 \ge ab(a^2+b^2)$!

Megoldás:
Végezzünk célszerű átalakításokat!

$$a^4+b^4-a^3b-ab^3 \ge 0$$
$$a^3(a-b)+b^3(b-a) \ge 0$$

$$(a-b)(a^3-b^3) \ge 0$$

Ez pedig igaz.

9. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a és b valós pozitív számokra teljesül az

$$a^2+b^2 \le \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}!$$

Megoldás:

Célszerű átalakításokat végezve.

$$a^2-\frac{a^3}{b}+b^2-\frac{b^3}{a} \le 0$$

$$a^2\left(1-\frac{a}{b}\right)+b^2\left(1-\frac{b}{a}\right)\le 0 \qquad a^2\left(\frac{b-a}{b}\right)+b^2\left(\frac{a-b}{a}\right)\le 0$$

$$a^2\left(\frac{b-a}{b}\right)-b^2\left(\frac{b-a}{a}\right)\le 0 \qquad (b-a)\left(\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}\right)\le 0$$

$$(b-a)\left(\frac{a^3-b^3}{ab}\right)\le 0$$

$$(a-b)\left(\frac{a^3-b^3}{ab}\right)\ge 0$$

Ez pedig igaz.

10. Legyen a, b, c pozitív valós szám. Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\le\frac{3}{2}$$

Megoldás:

Tegyük az egyes tagokat négyzetgyök alá:

$$\sqrt{\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}}+\sqrt{\frac{b^2}{(b+a)(b+c)}}+\sqrt{\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}}\le\frac{3}{2}$$

$$\sqrt{\frac{a}{(a+b)}\cdot\frac{a}{(a+c)}}+\sqrt{\frac{b}{(b+a)}\cdot\frac{b}{(b+c)}}+\sqrt{\frac{c}{(c+a)}\cdot\frac{c}{(c+b)}}\le\frac{3}{2}$$

Alkalmazva a geometriai és aritmetikai közép közti összefüggést:

$$G\le A$$

$$\sqrt{\frac{a}{(a+b)}\cdot\frac{a}{(a+c)}}\le\frac{\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}}{2},$$

$$\sqrt{\frac{b}{(b+a)}\cdot\frac{b}{(b+c)}}\le\frac{\frac{b}{b+a}+\frac{b}{b+c}}{2},\ \sqrt{\frac{c}{(c+a)}\cdot\frac{c}{(c+b)}}\le\frac{\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}}{2}$$

Ezeket összeadva kapjuk:

$$\sqrt{\frac{a}{(a+b)}\cdot\frac{a}{(a+c)}}+\sqrt{\frac{b}{(b+a)}\cdot\frac{b}{(b+c)}}+\sqrt{\frac{c}{(c+a)}\cdot\frac{c}{(c+b)}}\le\frac{\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}}{2}+\frac{\frac{b}{b+a}+\frac{b}{b+c}}{2}+$$

$$\frac{\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}}{2}=\frac{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}}{2}+\frac{\frac{a}{a+c}+\frac{c}{a+c}}{2}+\frac{\frac{b}{b+c}+\frac{c}{b+c}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Ezzel bebizonyítottunk az egyenlőtlenséget.

Az „=“ akkor áll fenn, ha $a=b=c$.

Feladatsorok bizonyításokra

1. **Bizonyítsd indirekten!**

$\forall n \in N$:

a) $2/n^2 \Rightarrow 2/n$
b) $3/n^2 + 2 \Rightarrow 3 \nmid n$
c) $3 \nmid (n^4 - 1) \Rightarrow 3/n$
d) $3 \nmid (n^4 + 2) \Rightarrow 3/n$
e) $10/(n^2 + 6) \Rightarrow 5 \nmid n$
f) $5/n^2 + 1 \Rightarrow 10 \nmid n$

2. **Bizonyítsd, be!**

$\forall n \in N$:

a) $2/n.(n+1)$
b) $3/n.(n+1).(n+2)$
c) $2/n^3 + 11n$
d) $3/n^3 + 11n$
e) $6/n^3 + 11n$
f) $4/n^4 + 3n^2$
g) $12/n^5 - n^3$
h) $30/n^5 - n$
i) $120/n^5 - 5n^3 + 4n$

3. **Bizonyítsd be ellentmondással!**

a) $\sqrt{2}$ irracionális szám,
b) $\sqrt{5}$ irracionális szám.

Feladatok teljes indukcióra:

1. Bizonyítsd be, hogy
$1+3+...+2n + 1 = n^2$, ahol $n \,\square\, Z^+$!

2. Bizonyítsd be, hogy $1^2+2^2+...+n^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$, ahol $n \in Z^+$!

3. Bizonyítsd be, hogy $\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.14} + ... + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$, ahol $n \in N$!

4. Bizonyítsd be, hogy $n \rangle 3 - ra$ igaz $3^n \rangle 2^n + 7n$, ahol $n \in N$!

5. Bizonyítsd be, hogy $1.2+2.3+...+n.(n+1) = \frac{n.(n+1)(n+2)}{3}$, ahol $n \in Z^+$!

6. Bizonyítsd be, hogy $1^3+2^3+...+n^3 = \left[\frac{n.(n+1)}{2}\right]^2$, ahol $n \in Z^+$!

7. Bizonyítsd be, hogy $9/\ 7^n + 3n-1$, ahol $n \in Z^+$!

8. Bizonyítsd be, hogy $7/\ 3^{n+2} + 4^{2n+1}$, ahol $n \in Z^+$!

9. Bizonyítsd be, hogy $37/\ 2^{n+5}.3^{4n} + 5^{3n+1}$, ahol $n \in Z_0^+$!

10. Bizonyítsd be, hogy $36/\ 7^n + 30n + 35$, ahol $n \in Z_0^+$!

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY
EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja
OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

Logika

LOGIKAI FELADATOK

1.példa

A 7 törpe házikójában valaki eltört egy tányért. Hófehérkének így számoltak be a történtekről:
Tudor: *Nem* Szundi volt. Én voltam.
Morgó: Nem én voltam. Nem Hapci volt.
Vidor: *Tudor* volt. Nem Morgó volt.
Ki törte el a tányért, ha a törpék egyik állítása igaz, a másik hamis?

2. példa

Négy lány futóversenyen vett részt. A verseny után mindegyiket megkérdezték, melyik helyen végzett.
Anna: „Nem lettem sem első, sem utolsó."
Bella: „Nem lettem első."
Csilla: „Első lettem."
Dóra: „Én lettem az utolsó."
Valaki, aki a versenyt is látta, ezt mondta: „A négy válasz közül három igaz, egy hamis." Ki mondott valótlant? Ki volt az első?

FELADATOK GYAKORLÁSRA:

1.feladat

Manócska egyszer madártejet készített barátainak. Mielőtt azonban tálalhatta volna, a madártej eltűnt. A tökházban Manócskán kívül még négyen voltak: Mazsola, Tádé, Cica-Mica és Morzsi. A kérdésre, hogy ki ette meg a madártejet, így válaszoltak:
Mazsola: Tádé volt. Tádé: Cica-Mica volt.
Morzsi: Nem én voltam. Cica-Mica: *Tádé* füllent.
Ki ette meg a madártejet, ha négyőjük közül pontosan egy hazudott?

2.feladat

Tréfi, Okoska, Ügyi és Törpilla egy verseny után a következőket mesélték Törpapának:
Tréfi: *Nem* én lettem az első. Okoska: Törpilla nyert.
Ügyi: Tréfi nyert. Törpilla: Nem Tréfi nyert.
Ki nyerte a versenyt, ha a négy törp közül pontosan egy mondott igazat?

3. feladat

Az iskolai futóverseny döntőjébe öten jutottak: Aladár, Béla, Csaba, Dezső és Endre. A verseny után az eredményről a következőt mondták:
Aladár: — Dezső második lett. Engem csak ketten előztek meg.
Béla: — Én győztem. A második Csaba lett.
Csaba: — Harmadik lettem. Bélát mindenki megelőzte.
Dezső: — Második helyen végeztem. Endre negyedik lett.
Endre: — Egyetlen futót előztem meg. A versenyt Aladár nyerte.
Ki nyerte a versenyt, ha tudjuk, hogy

4. feladat

Három gyanúsított állt a vizsgálóbíró előtt. Biztos, hogy egyik volt a tettes. Mindegyik három kérdésre válaszolt, részben hazugsággal.

A válasza: ,,B volt a tettes."

„Soha nem voltam a helyszínen."

„Ártatlan vagyok."

B válasza: „C ártatlan."

„Mindaz amit A állít, hazugság."

„Nem én tettem."

C válasza: „Nem én voltam."

„A hazudik, ha azt állítja, hogy soha nem volt a helyszínen."

,,B hazudik, ha azt mondja, hogy hazugság mindaz, amit A állít."

Állapítsd meg, hogy ki a bűnös.

2. Öt gyerek a következőt állítja egymásról.

András: — A fiútestvérem teniszezik.

Bea: — Pontosan két fiútestvérem van.

Csaba: — Nincs fiútestvérem.

Dóra: — Fiútestvérem hegedül.

Erik: — A leánytestvérem szereti a matematikát.

Ki lehet Csaba testvére, ha mindenki igazat mond?

SKATULYA-ELV

1.példa

Van 70 golyónk, közülük 20 piros, 20 zöld, 20 sárga, és a maradék 10 közül néhány fekete, a többi fehér. Legkevesebb hány darabot kell kivenni, hogy biztosan legyen közte 10 azonos színű golyó?

2.példa

Egy dobozban négyféle színű golyóból összesen 40 darab van. Tudjuk, hogy bekötött szemmel húzva legalább 32 darabot kell kivenni, hogy a kihúzottak között mind a négyféle színű golyóból biztosan legyen legalább egy.

a) Legalább hány golyó van egy-egy színből?

b) Legfeljebb hány golyó lehet egy-egy színből?

FELADATOK GYAKORLÁSRA:

1. feladat

Van 80 golyónk, közülük 35 piros, 25 zöld, 15 sárga, 5 fekete. Legkevesebb hány darabot kell kivenni, hogy biztosan legyen közte

a) piros;

b) piros vagy fekete;

c) piros és fekete;

d) két különböző szín;

2. feladat

Egy ládában négyfajta alma van, minden fajtából egyenlő mennyiségű, összesen 100 darab. Hány almát kell kivenni véletlenszerűen, hogy valamelyik fajtából biztosan legyen 10 alma?

3. feladat

Egy zacskóban 80 cukor van: 20 piros, 20 fekete, 20 zöld, 20 sárga. Egy bekötött szemű gyereknek legalább hány cukrot kell kiemelnie ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük

a) valamelyik színből 4 darab?
b) mindegyik színből 4 darab?

4. feladat

Egy dobozban 2 fehér, 3 piros, 4 kék és 5 zöld egyforma méretű golyó van. Legkevesebb hány golyót kell találomra kihúzni közülük, hogy biztosan legyen közöttük mindegyik színből?

5. feladat

Egy zsákban 11 piros, 8 fehér és 6 fekete golyó van. Hány golyót kell kivenni véletlenszerűen, hogy biztosan legyen közte

a) fehér vagy fekete?
b) fehér és fekete?
c) két különböző szín?
d) valamelyik színből mind?
e) két színből mindegyik?
f) valamelyik színből három?

6. feladat

Egy dobozban néhány darab piros és néhány darab zöld golyó van. Becsukott szemmel 7 darabot kell kivenni, hogy biztosan legyen közte piros, és 13 darabot kell kivenni ahhoz, hogy biztosan legyen kétféle színű golyónk. Hány piros és hány zöld golyó van a dobozban?

7. feladat

Egy zsákban 10 fehér, 20 fekete, 30 barna, egyforma méretű zokni van. Hány darabot kell kivenni véletlenszerűen, hogy biztosan legyen közte

a) 1 pár?
b) 1 pár fehér?
c) 1 pár fekete?
d) 1 pár barna?
e) 2 pár?
f) 5 pár?
g) 3 pár fehér?
h) 3 pár fekete?
i) 2 pár fehér és 1 pár barna?
j) 2 pár fehér, 3 pár fekete, 5 pár barna?

8. feladat

Egy dobozban azonos méretű zoknik vannak: összesen öt párra való fehér, tíz párra való fekete és tizenöt párra való barna zokni. Hány darabot kell ezekből látatlanban kihúzni ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük egy pár? (A jobb- és ballábas zoknikat nem különböztetjük meg.)

9. feladat

Egy zsákban 10 pár fekete és 10 pár barna, ugyanolyan méretű kesztyű van. Hány darabot kell találomra kivenni, hogy biztosan legyen köztük egy pár (azonos színű) kesztyű?

10. feladat

Igaz-e, hogy egy 37-es létszámú osztályban biztosan van négy diák, akik ugyanabban a hónapban ünneplik születésnapjukat?

LOGIKAI NÉGYZET

1. példa

Bokor, Pogány, Regős és Szegő tehetséges művészek. Az egyik színész, a másik festő, van köztük karmester és író is. (A nevek sorrendje nem feltétlenül a foglalkozások sorrendjét mutatja.)

(1) Bokor és Regős előző este a karmester koncertjét hallgatták meg.

(2) Pogányról és az íróról a festőművész portrét készített.

(3) Az író, akinek Szegőről szóló életrajzi regénye nagy sikert aratott, azt tervezi, hogy Bokorról is ír regényt.

(4) Bokor nem ismeri Regőst, sohasem hallott róla.

Állapítsuk meg ezek után, hogy melyik művész mivel foglalkozik!

FELADATOK GYAKORLÁSRA:

1. feladat

Négy ember vezetékneve Kanász, Halász, Vadász és Madarász. Az egyikük foglalkozása kanász, a másiké halász, a harmadiké vadász, a negyediké pedig madarász. Tudjuk, hogy a Kanász nem halász, a Halász nem vadász, a Vadász nem madarász, a Madarász nem kanász és nem halász, valamint egyikük foglalkozása sem egyezik meg vezetéknevével. Mi a foglalkozása a Vadász vezetéknevű embernek?

2. feladat

Kokas, Diós és Füles egy utcában lakik. Egyikük asztalos, a másik szobafestő, a harmadik bádogos. Nemrégiben a szobafestő meg akarta kérni ismerősét, az asztalost, hogy készítsen neki egy bútort, de megtudta, hogy az asztalos éppen a bádogos házában dolgozik. Tudjuk azt is, hogy Füles sosem hallott Diósról.

Kinek mi a foglalkozása?

3. feladat

Egy üzemben három jóbarát dolgozik: egy lakatos, egy esztergályos és egy hegesztő. A nevük: Balogh, Kovács, Szabó. A lakatosnak nincsenek testvérei, és ő a legfiatalabb a barátok között. Szabó, aki Balogh testvérét vette feleségül, idősebb az esztergályosnál.

Kinek mi a foglalkozása?

4. feladat

Négy barát, András, Béla, Csaba és Dezső kötélhúzással mérik össze erejüket. Mikor a kötél egyik végét András és Csaba fogja, a másikat pedig Béla, ha nehezen is, de Béla maga felé húzza két barátját. Ha András és Béla állnak Csabával és Dezsővel szemben, bármennyire is erőlködnek, egyik páros sem tudja maga felé húzni a kötelet. Elegendő azonban, ha András és Csaba helyet cserél, így András és

5. feladat

Jascsák, Steinitz, Podloha és Csicserin egy városban lakik. A foglalkozásuk: pék, orvos, mérnök és rendőr. Jascsák és Steinitz szomszédok, munkába menet együtt utaznak. Steinitz idősebb Podlohánál. Jascsák asztaliteniszben rendszeresen megveri Csicserint. A pék mindig gyalog megy munkába. A rendőr nem az orvos mellett lakik. A mérnök és a rendőr egyetlen alkalommal találkozott, akkor, amikor a rendőr közlekedési szabálytalanság miatt megbírságolta a mérnököt. A rendőr idősebb az orvosnál és a mérnöknél.

Állapítsd meg, hogy kinek mi a foglalkozása!

6. feladat

Feri, Gyula, Jancsi és Karcsi meglátogatták egy barátjukat. A négy fiú családi neve — valamilyen sorrendben — : Kiss, Nagy, Szabó és Molnár. Elsőnek Molnár érkezett, másodiknak Jancsi, azután Kiss és végül Gyula. Mindenki hozott egy ajándékot: Molnár bűvös kockát, Feri golyóstollat, Gyula virágot, Szabó pedig könyvet. Mi a négy fiú teljes neve?